

**Existenz assoziierter Gleichgewichte und
ihre Bedeutung im Rahmen einer neuen Theorie der
dynamischen Relaxation selbstgravitierender Materie**

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der

Fakultät für Physik
und Astronomie

an der Ruhr-Universität Bochum

von

HEINZ WIECHEN
aus Bochum

Bochum 1989



**Existenz assoziierter Gleichgewichte und
ihre Bedeutung im Rahmen einer neuen Theorie der
dynamischen Relaxation selbstgravitierender Materie**

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der

Fakultät für Physik
und Astronomie

an der Ruhr-Universität Bochum

von

HEINZ WIECHEN
aus Bochum

Bochum 1989

Dissertation eingereicht am 03.05.1989

Tag der mündlichen Prüfung 21.06.1989

Referent Prof. Dr. K. Schindler

Korreferent Prof. Dr. K. Rohlf

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden grundlegende Aspekte einer neuen Theorie der Relaxation stoßfrei selbstgravitierender Materie behandelt.

Weite Teile der Literatur zu diesem Thema gehen von der Idee aus, die makroskopischen Endgleichgewichte stoßfreier Relaxation als Maxima entropieähnlicher konkaver Funktionale durch Variation unter den Nebenbedingungen von Masse- und Energieerhaltung zu bestimmen. Wir zeigen, daß derartige Konzepte nur für sehr spezielle Anfangsbedingungen Lösungen liefern.

Wir stellen eine neue Theorie zur stoßfreien Relaxation selbstgravitierender Materie vor, in der der Relaxationsprozeß von der Menge an Energie ΔE abhängt, die zum Erreichen eines makroskopischen Gleichgewichts durch Phasenumischung von Nichtgleichgewichtsenergie in Gleichgewichtsenergie umgesetzt werden muß. Diese Nichtgleichgewichtsenergie hindert ein System daran, im Rahmen der exakt stoßfreien Dynamik in ein Gleichgewicht hineinzurelaxieren. ΔE entspricht der Differenz zwischen der Energie eines vorgegebenen Anfangszustands und der Energie des Zustands minimaler Energie, der mit der Bedingung der Phasenraumdickeerhaltung verträglich ist. Diesen Zustand minimaler Energie ordnen wir einem gegebenen Anfangszustand als assoziiertes Gleichgewicht zu und benutzen die Energiedifferenz ΔE als Maß für die Entfernung eines Anfangszustands von einem global stabilen Gleichgewicht im Rahmen der exakt stoßfreien Dynamik.

In dieser Arbeit zeigen wir, daß zu jedem (nichtsingulären) Anfangszustand ein assoziiertes Gleichgewicht existiert. Damit ermöglichen wir zum einen, für jeden Anfangszustand die entsprechende Menge an Nichtgleichgewichtsenergie zu bestimmen, zum anderen legen wir erstmalig eine theoretisch fundierte Grundlage für die Existenz global stabiler Endgleichgewichte dynamischer Relaxation. (In der Literatur wurde in diesem Zusammenhang der Aspekt der globalen Stabilität bisher vernachlässigt.) Insbesondere führen wir den Beweis, daß stoßfrei selbstgravitierende Systeme weder in Teilen noch als ganzes in eine Singularität kollabieren können.

Zur Durchführung unseres Konzepts konstruieren wir für die hier behandelten Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden eine verallgemeinerte kinetische und eine verallgemeinerte potentielle Energie, analog zur kinetischen und potentiellen Energie einfacher mechanischer Systeme mit nur wenigen Freiheitsgraden. Wir beweisen, daß die verallgemeinerte potentielle Energie gleichmäßig nach unten beschränkt ist, so daß die entscheidende Bedingung für die Existenz des Zustands minimaler Energie erfüllt ist. Das zu einem Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht entspricht dem absoluten Minimum der verallgemeinerten potentiellen Energie. Diese Minimaleigenschaft garantiert die globale Stabilität des assoziierten Gleichgewichts sowohl im Sinne eines Energieprinzips als auch im Sinne von Lyapunov. Bei der Konstruktion des zu einem Anfangszustand assoziierten Gleichgewichts beschränken wir uns in dieser Arbeit auf den Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses. Anhand von

Beispielen zeigen wir, daß innerhalb einer Klasse von Anfangszuständen schon geringe Änderungen eines Parameters zu signifikanten Unterschieden für den jeweiligen Anteil von Nichtgleichgewichtsenergie an der Gesamtenergie führen kann.

Mit dieser Arbeit legen wir das Fundament für die Entwicklung von Modellrelaxationen, die die Umsetzung von ΔE in Gleichgewichtsenergie durch kollektive Dissipation beschreiben und so die Berechnung von Endgleichgewichten durch stoßfreie Relaxation ermöglichen. Ein Szenario zeigt, wie man sich diesen Relaxationsprozeß im Rahmen unserer Theorie prinzipiell vorzustellen hat.

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Theoretische Physik IV der Fakultät für Physik und Astronomie der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr. Karl Schindler danke ich für die Anregung dieser Arbeit, für sein stetes Interesse und für viele wertvolle Diskussionen.

Für zahlreiche anregende Diskussionen über die Physik stoßfrei selbstgravitierender Materie und Unterstützung bei den numerischen Teilen dieser Arbeit gilt mein besonderer Dank meinem Kollegen Harald Ziegler.

Besonders danken möchte ich auch Herrn Dr. Michael Kießling für wertvolle und hilfreiche Diskussionen.

Den Herren Ziegler und Dr. Kießling danke ich zudem für die Durchsicht des Manuskripts.

Den Herren Thomas Neukirch und Dr. Antonius Otto danke ich für interessante und aufschlußreiche Gespräche, Herrn Prof. Dr. Donald Lynden-Bell danke ich für seine Gastfreundschaft und interessanten Kommentare.

Herrn Udo Arendt danke ich für sein stetes Bemühen um das "Rechenzentrum" der TP IV, so daß eine problemlose Erstellung dieser Arbeit in Wort und Bild möglich war.

1. Einleitung	1
2. Maxima entropieähnlicher konkaver Funktionale	10
2.1 Die Lynden-Bell Statistik	10
2.2 Lösungen der Lynden-Bell Statistik	16
2.2.1 Der Spezialfall verschwindender Entartung	16
2.2.2 Die allgemeineren Fälle der Lynden-Bell Statistik	18
2.3 Variation allgemeiner entropieähnlicher konkaver Funktionale	21
3. Ein neues Konzept	26
3.1 Voraussetzungen	26
3.2 Grundlagen des Konzepts	30
4. Herleitung einer verallgemeinerten kinetischen und einer verallgemeinerten potentiellen Energie	34
5. Die gleichmäßige Beschränktheit von W_ψ und ihre Konsequenzen	39
5.1 Beweis der gleichmäßigen Beschränktheit von W_ψ	39
5.2 Beweis, daß stoßfrei selbstgravitierende Systeme nicht in eine Singularität kollabieren können	47
6. Das assoziierte Gleichgewicht	51
6.1 Bestimmung des assoziierten Gleichgewichts	51
6.2 Stabilität des assoziierten Gleichgewichts	57
6.3 Monotonie von W_ψ bezüglich der Lösungen der Poisson-Gleichung	60



7. Quantitative Bestimmung assoziierter Gleichgewichte	64
7.1 Symmetrie des assoziierten Gleichgewichts	64
7.2 Verfahren zur Berechnung von assoziierten Gleichgewichten	66
7.3 Beispiele	71
7.3.1 Erstes Beispiel	71
7.3.2 Zweites Beispiel	74
8. Szenario einer Modellrelaxation	80
9. Zusammenfassung und Diskussion	84
Anhang	89
Literatur	94

1. Einleitung

Selbstgravitierende Materie kann zeitasymptotisch nicht in ein singularitätenfreies thermisches Gleichgewicht hineinrelaxieren, da Stoßwechselwirkungen zur gravothermischen Katastrophe führen (Lynden-Bell, 1967; Lynden-Bell und Wood, 1968; Saslaw, 1968, 1969; Kießling, 1989). Daher können sich zum Beispiel elliptische Galaxien, wie sie heute beobachtet werden, nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Vielmehr haben sie im Laufe ihrer Entwicklung stationäre Gleichgewichte fernab vom thermischen Gleichgewicht erreicht, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die typischen Zeiten für Stoßrelaxation durch Zweierstöße zwischen Sternen (Kleinkinkelstöße) in solchen Systemen deutlich größer sind als das Alter des Universums (z.B. Lynden-Bell, 1967; Gott, 1977; Lachièze-Rey, 1984). Für eine elliptische Galaxie mit 10^{11} Sternen beträgt die Stern-Stern Stoßzeit zum Beispiel 10^{16} Jahre und ist damit um etwa 6 Größenordnungen größer als das Weltalter. Dementsprechend wird die dynamische Entwicklung von Sternsystemen hin zu den heute beobachteten elliptischen Galaxien auch weitgehend im Rahmen der stoßfreien Theorie behandelt (z.B. Lynden-Bell, 1967; Gott, 1973, 1975; Shu, 1978; Madsen, 1987; Stiavelli und Bertin, 1987). Für Zeiten, in denen die Sternentstehung nicht abgeschlossen ist, können Stoßeffekte nicht völlig vernachlässigt werden (Larson, 1969, 1974a,b, 1975). Nach Abschluß der Sternentstehung hingegen kann ein System durch stoßfreie Relaxation auf dynamischen Zeitskalen ($\approx 10^7$ Jahre für eine typische elliptische Galaxie) ein

stationäres Gleichgewicht erreichen, das jedoch nicht als thermodynamisches Gleichgewicht verstanden werden kann. Daher wird stoßfreie Relaxation in der Literatur als der wesentliche Prozeß für die Relaxation von Systemen wie elliptischen Galaxien diskutiert. Ein anderes wichtiges Beispiel für stoßfreie Relaxation ist die Bildung massiver galaktischer Halos aus dunkler Materie (Rephaeli, 1983; Madsen, 1987).

Die Grundlage stoßfreier Relaxation ist die kollektive Wechselwirkung der Materie über ein räumlich und zeitlich stark fluktuierendes Gravitationsfeld. Dabei können selbstgravitierende Systeme im Rahmen der exakten stoßfreien Dynamik im allgemeinen nicht in einen stationären Zustand hineinrelaxieren. Die Fluktuationen erfolgen jedoch mit fortschreitender Zeit auf immer kleineren Skalen. Durch diese immer weitergehende Verfeinerung der Phasenraumstruktur (Abbildung 1) kann das System durch Phasemischung einen Gleichgewichtszustand auf einer makroskopischen Skala erreichen (z.B. Misra et al., 1979).

Der Übergang von der exakten mikroskopischen Beschreibung zu einer makroskopischen Beschreibung des Systems ist mit einem Informationsverlust verbunden und ist äquivalent zu einem irreversiblen Übergang von der exakt reversiblen, entropieerhaltenden Dynamik zu einer makroskopischen Dynamik mit höherer Entropie. Diese Zunahme der Informationsentropie entspricht der Umwandlung eines Teils der Gesamtenergie von Nichtgleichgewichtsenergie in Gleichgewichtsenergie oder, anders ausgedrückt, von Energie geordneter Bewegung in ungerichtete Systemenergie. Stoßfreie Relaxation erfolgt somit durch kollektive Dissipation (Balescu, 1975).

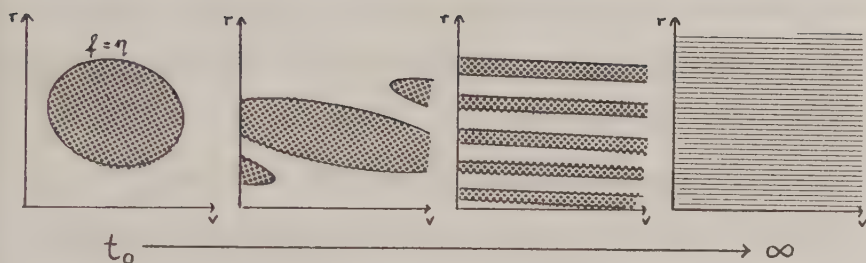


Abbildung 1. Schematische Darstellung der Filamentierung einer Verteilungsfunktion mit zunehmender Zeit im 6-dimensionalen Phasenraum. Innerhalb des schraffierten Gebietes soll die Verteilungsfunktion einen konstanten Wert $\eta > 0$ besitzen, außerhalb hat sie den Wert Null.

Schon 1964 hat Hénon durch numerische Untersuchungen die Bedeutung dieses Prozesses nachgewiesen. Das erste analytische Modell für stoßfreie Relaxation selbstgravitierender Materie wurde 1967 von Lynden-Bell vorgestellt, der diesem Prozeß den Namen "violent relaxation" gab. Wir wollen diesen Begriff im folgenden mit "dynamische Relaxation" übersetzen.

In seiner Theorie verfolgt Lynden-Bell die Idee, unter den Nebenbedingungen von Masse- und Energieerhaltung mit den Methoden der statistischen Mechanik den wahrscheinlichsten makroskopischen Zustand zu bestimmen. Er erhält dabei für die

Verteilungsfunktion eine Fermi-Dirac-Verteilung bzw. unter der Annahme, daß die Phasenraumdichte des makroskopischen Endzustandes sehr viel kleiner sein soll als die des Anfangszustandes, eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Dieser Grenzfall wird von Lynden-Bell und in dem überwiegenden Teil der Literatur (z.B. Freeman, 1975; Shu, 1978; Hoffman et. al., 1979; White, 1987; Saslaw, 1985) als der physikalisch eigentlich relevante Fall angesehen.

Als ein Mangel in Lynden-Bell's Theorie wird in der Literatur die Tatsache diskutiert, daß die dem oben genannten Grenzfall entsprechende Maxwell-Boltzmann-Verteilung keine Endzustände mit endlicher Gesamtmasse liefert (z.B. Lynden-Bell, 1967; Freeman, 1975; Shu, 1978; Tremaine et al., 1986; White, 1987). In Kapitel 2 werden wir die Lynden-Bell Statistik ausführlicher diskutieren und zeigen, daß die Theorie auch allgemein nur für sehr spezielle Anfangsbedingungen Endzustände endlicher Masse liefern kann.

Shu (1978) modifiziert Lynden-Bell's Theorie, indem er die Systeme als aus diskreten Teilchen bestehend behandelt und weitere statistische Annahmen macht; er folgt jedoch im wesentlichen der Grundidee des Lynden-Bell'schen Modells. Severne und Luwell (1980) behandeln in einer expliziten dynamischen Theorie die späte ruhige Phase dynamischer Relaxation. Gurzadayan und Savvidy (1986) berechnen aus der Ergodentheorie die charakteristische Zeit für dynamische Relaxation. Weitere Aspekte dynamischer Relaxation werden von Luwell und Severne (1983) und Allen und Yabushita (1984) diskutiert.

Stoßfrei selbstgravitierende Systeme sind auch Gegenstand zahlreicher numerischer Untersuchungen und Simulationen (z.B. Bouvier und Janin, 1970; Gott, 1973, 1975; Binney, 1976; Shlosman et al., 1979; Hoffman et al, 1979; van Albada, 1982; May und van Albada, 1984; Tanekusa, 1987). Diese Arbeiten bestätigen die fundamentale Bedeutung dynamischer Relaxation für die Entwicklung stoßfrei selbstgravitierender Systeme. Aus den numerischen Untersuchungen ergeben sich jedoch Hinweise auf eine stärkere Abhängigkeit der Endzustände von den Anfangsbedingungen, als es nach der Theorie von Lynden-Bell der Fall sein sollte. Es bleibt mehr Information über den Anfangszustand während des Relaxationsprozesses erhalten. Auf die Abhängigkeit der Endzustände von den Anfangszuständen hat schon Hénon (1964) hingewiesen. In anderem Zusammenhang, nämlich in einer Diskussion selbstgravitierender Systeme mit schwachen Stößen, weisen auch Prigogine und Severne (1966) auf den Einfluß der Anfangsbedingungen hin.

Aus der Literatur ergeben sich somit zwei wesentliche Mängel in Lynden-Bell's Theorie zur dynamischen Relaxation. Zum einen bestehen deutliche Diskrepanzen zwischen den numerischen Resultaten und den Vorhersagen aus Lynden-Bell's Modell, zum anderen beschreibt seine Theorie in dem als physikalisch relevant angesehenen Grenzfall einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung nur Systeme mit unendlicher Gesamtmasse. Wie schon erwähnt werden wir zeigen, daß seine Theorie auch allgemein nur für sehr spezielle Anfangsbedingungen Lösungen mit endlicher Gesamtmasse liefern kann.

Als Erklärung für die hieraus resultierende Schwierigkeit, die Relaxation realer Systeme zu beschreiben, führt Lynden-Bell zwei Punkte an. Zum einen führt er aus, daß die Grundannahmen seiner Statistik nicht für den gesamten Zeitraum der Relaxation gültig sein können, so daß die dynamische Relaxation realer Galaxien nur unvollständig erfolgt. Dieser Argumentation folgen weite Teile der Literatur (z.B. Freeman, 1975; Shu, 1978; Tremaine et al., 1986). Zum anderen sagt Lynden-Bell, daß der Relaxationsprozeß realer Galaxien durch andere, äußere Effekte beeinflusst sein wird. Dieses Argument vertreten insbesondere auch Layzer (1977) und Lachièze-Rey (1984).

In zahlreichen Ansätzen wurde versucht, die oben genannten Schwierigkeiten des Lynden-Bell'schen Modells besser zu verstehen und zu beseitigen. White und Narayan (1987) berechnen Zustände maximaler Entropie für isolierte selbstgravitierende Gaskugeln. Neben der Erhaltung von Masse und Energie geben sie als zusätzliche Bedingung einen endlichen Radius im Ortsraum, einen maximalen Wert für die Phasenraumdichte und Massendichteprofile vor. Sie zeigen, daß die Zustände maximaler Entropie Systeme mit einer stark lokal konzentrierten Dichte im Zentrum sind, wobei diese Dichtespitze einen endlichen Beitrag zur Bindungsenergie, aber keinen Beitrag zur Gesamtmasse liefert.

Stiavelli und Bertin (1987) berechnen für stoßfrei selbstgravitierende Systeme die Zustände maximaler Entropie; neben Masse- und Energieerhaltung benutzen sie eine weitere geeignet erscheinende Bedingung. In einem anderen Ansatz bestimmen Stiavelli und Bertin ebenfalls die Zustände maximaler Entropie, wobei sie ad hoc

unterschiedliche a priori Wahrscheinlichkeiten einführen. Sie erhalten dabei für die Endzustände dynamisch relaxierender Systeme eine Verteilungsfunktion, die Bertin und Stiavelli (1984) an anderer Stelle aus dynamischen Argumenten abgeleitet haben. Richestone und Tremaine (1988) berechnen als Endzustände dynamischer Relaxation Maxima entropieähnlicher Funktionale unter der Nebenbedingung einer ad hoc vorgegebenen Massendichte. Dejonghe (1987) diskutiert die Jaynes-Entropie, die ein gewisses Maß an a priori Kenntnis über die Endzustände berücksichtigt.

Die Ansätze, Maxima entropieähnlicher Funktionale zu bestimmen, gehen zurück auf eine Arbeit von Tremaine et al. (1986). Dort diskutieren Tremaine et al. mehr grundsätzliche Aspekte dynamischer Relaxation, die mit dem Übergang von der mikroskopischen stoßfreien Dynamik zu einer makroskopischen Beschreibung zusammenhängen. Sie zeigen, daß dabei nicht nur die Boltzmann-Entropie, sondern eine ganze Klasse von Funktionalen zunimmt. Diese Klasse von Funktionalen nennen Tremaine et al. H -Funktionen (siehe hierzu aber die Klarstellung von Kandrup (1986)). Tremaine et al. führen aus, daß der Endzustand eines dynamisch relaxierenden Systems dem Maximum eines dieser Funktionale entsprechen sollte und durch Variation unter den Nebenbedingungen von Masse- und Energieerhaltung bestimmt werden kann. In Kapitel 2 werden wir zeigen, daß diese Aussage (außer für sehr spezielle Anfangsbedingungen) einer Korrektur bedarf.

Auch die Lynden-Bell Statistik läßt sich auf ein Variationsproblem eines Funktionals der von Tremaine et al. angesprochenen Klasse zurückführen. Dieses Funktional wird in der Literatur häufig auch stoßfreie Entropie oder Lynden-Bell Entropie

genannt und die Bezeichnung Entropie auf alle Funktionale der oben angesprochenen Klasse ausgedehnt (Tremaine et al., 1986; White und Narayan, 1987; White, 1987; Richestone und Tremaine, 1988). Diesem und ähnlichen Funktionalen wird dabei für stoßfrei selbstgravitierende Systeme dieselbe Bedeutung beigemessen, wie der Boltzmann-Entropie in der statistischen Mechanik des thermodynamischen Gleichgewichts. Um die Begriffe klar zu trennen und nicht einem ad hoc vorgegebenen Funktional die gleiche Bedeutung zu geben wie der als Informationsentropie zu verstehenden Boltzmann-Entropie (Binney, 1987), wollen wir im folgenden den Begriff Entropie nur für die Boltzmann-Entropie verwenden.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Grundidee aller oben beschriebenen Ansätze darin besteht, das Maximum der Entropie oder eines ähnlichen Funktionalen durch Variation unter geeignet erscheinenden Nebenbedingungen zu bestimmen.

In dieser Arbeit wollen wir ein grundlegend neues, von den oben beschriebenen Ansätzen abweichendes Konzept für die Behandlung dynamischer Relaxation vorstellen, von dem wir ein besseres Verständnis des Prozesses an sich und insbesondere einen tieferen Einblick über den Einfluß der Anfangszustände auf die Endzustände erwarten.

In Kapitel 3 werden wir die Grundlagen dieses Konzepts vorstellen. In unserer Theorie berücksichtigen wir, wie weit ein gegebener Anfangszustand im Rahmen der stoßfreien Theorie von einem global stabilen Gleichgewicht entfernt ist. Dieses

global stabile Gleichgewicht ordnen wir dem Anfangszustand als assoziiertes Gleichgewicht zu. Der Relaxationsprozeß selber soll dann von der Entfernung dieser beiden Zustände abhängen. Wir werden in dieser Arbeit nicht den vollständigen Relaxationsprozeß in ein Endgleichgewicht behandeln. Vielmehr ist das Ziel dieser Arbeit, das Fundament unserer Theorie zu errichten, auf dem aufbauend dann Modelle für den Prozeß der kollektiven Dissipation entwickelt werden können. Insbesondere werden wir zeigen, daß zu jedem (nichtsingulären) Anfangszustand ein assoziiertes Gleichgewicht existiert.

In Kapitel 4 leiten wir Ausdrücke für eine verallgemeinerte kinetische und eine verallgemeinerte potentielle Energie her und führen in Kapitel 5 den Beweis, daß die verallgemeinerte potentielle Energie gleichmäßig nach unten beschränkt ist. Als Konsequenz dieser Beschränktheit können wir desweiteren beweisen, daß ein stoßfrei selbstgravitierendes System weder in Teilen noch als ganzes in eine Singularität kollabieren kann.

In Kapitel 6 behandeln wir die Konstruktion des zu einem Anfangszustand assoziierten Gleichgewichts und diskutieren Eigenschaften dieses Zustandes. In Kapitel 7 behandeln wir anhand von Beispielen die quantitative Berechnung assoziierter Gleichgewichte.

Nachdem wir damit das Fundament unserer Theorie gelegt haben, zeigen wir in Kapitel 8, wie man sich den Relaxationsprozeß im Rahmen unserer Theorie prinzipiell vorzustellen hat. Die Zusammenfassung und Diskussion der Resultate erfolgt in Kapitel 9.

2. Maxima entropieähnlicher konkaver Funktionale

2.1 Die Lynden-Bell Statistik

In diesem Kapitel wollen wir die Frage diskutieren, ob die makroskopischen Endgleichgewichte dynamisch relaxierender Systeme stationäre Zustände eines geeigneten entropieähnlichen konkaven Funktionalen sind und durch Variation unter den Nebenbedingungen von Masse- und Energieerhaltung berechnet werden können. Dabei betrachten wir wie z.B. Tremaine et al. (1986) Funktionale der Form

$$S = - \int C(f) d^3 r d^3 v \quad (2.1)$$

$C(f)$ ist eine konvexe Funktion mit $C(0) = 0$. $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ bezeichnet die Verteilungsfunktion im 6-dimensionalen Phasenraum (μ -Raum). Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, sollen sich die Integrationen immer über den gesamten betrachteten Raum erstrecken. Eine konvexe Funktion kann durch folgende, für zweimal differenzierbare Funktionen äquivalente Definitionen charakterisiert werden (Hardy et al., 1952):

(i) $C(f)$ ist konvex, wenn für alle $p_i, f_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ ($\mathbb{R}^{\geq 0}$: Menge der positiven reellen Zahlen) gilt

$$C\left(\frac{p_i f_i}{\sum p_i}\right) \leq \frac{\sum p_i C(f_i)}{\sum p_i} \quad (2.2)$$

(ii) Wenn $C(f)$ differenzierbar ist, dann ist $C(f)$ konvex in $\mathbb{R}^{\geq 0}$, wenn für alle $f, f' \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ gilt

$$C(f') - C(f) \geq (f' - f)C'(f) \quad (2.3)$$

mit

$$C'(f) = \frac{dC}{df}$$

(iii) Wenn $C(f)$ zweimal differenzierbar ist, dann ist $C(f)$ konvex, wenn gilt

$$\frac{d^2C}{df^2} \geq 0 \quad (2.4)$$

Ein in der statistischen Mechanik ausgezeichnetes Funktional vom Typ (2.1) ist die Boltzmann-Entropie S_B

$$S_B = - \int f \ln f d^3r d^3v \quad (2.5)$$

Sie ist jedoch kein geeignetes Funktional, um Gleichgewichte dynamisch relaxierender Systeme zu bestimmen. Tatsächlich läßt sich leicht zeigen, daß die Boltzmann-Entropie mit den Nebenbedingungen Masse- und Energieerhaltung für selbstgravitierende Systeme kein Maximum besitzt, sondern nach oben unbeschränkt ist (Antonov, 1962). Denkt man sich zum Beispiel ein System der Masse M und der Energie E aufgespalten in einen Kern der Masse M_K und einen unendlich ausgedehnten, schwach gebundenen Halo der Masse $M - M_K$, so liefert dieser Halo einen unendlichen Beitrag zur Boltzmann-Entropie (Tremaine et al. 1986; die Argumentation geht zurück auf Binney).

Es mag überraschen, daß die Boltzmann-Entropie (2.5), die ja als Informationsentropie in der statistischen Mechanik des thermodynamischen Gleichgewichts eine zentrale Rolle spielt, hier nicht anwendbar ist. Der Grund hierfür ist, daß die

Dynamik stoßfrei selbstgravitierender Systeme durch die langreichweitigen gravitativen Wechselwirkungskräfte bestimmt wird. Die Relaxation erfolgt durch Phasennischung und die gesuchten Gleichgewichte sind Gleichgewichte auf makroskopischen Skalen, fernab vom thermodynamischen Gleichgewicht. Diese speziellen Eigenschaften stoßfreier Relaxation werden aber von der Boltzmann-Entropie bei einer Variation unter den Nebenbedingungen von Masse- und Energieerhaltung nicht berücksichtigt.

In dem ersten analytischen Modell für dynamische Relaxation leitet Lynden-Bell (1967) mit den Methoden der statistischen Mechanik ein entropieähnliches Funktional S_{LB} vom Typ (2.1) her, das für die Relaxation stoßfrei selbstgravitierende Systeme die Rolle der Boltzmann-Entropie übernehmen soll. Lynden-Bell unterteilt in seiner Theorie den gesamten Phasenraum in Mikrozellen mit dem Volumen ω . Für eine Anfangsverteilung der Form

$$f_0 = \begin{cases} \eta & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.6)$$

mit der Energie E und der Masse $M = \Omega\eta$ (Ω bezeichnet ein beliebiges, endliches Gebiet im Phasenraum) nimmt er dann eine Aufteilung in $N = \Omega/\omega$ Phasenraumelemente der Masse $\eta\omega$ vor. Die stoßfreie Dynamik des Systems ersetzt Lynden-Bell nun durch eine Statistik der Phasenraumelemente über dem Mikrozellengitter des Phasenraumes. Dabei berücksichtigt er neben der Energie- und Massenerhaltung die Inkompressibilität der Phasenraumdichte, indem er fordert, daß jede Mikrozelle höchstens von einem Phasenraumelement belegt wird. Ferner setzt er voraus, daß die zeitlichen und räumlichen Variationen der Dynamik so stark sind, daß alle Verteilungen

der Phasenraumelemente auf die Mikrozellen, die die obigen Bedingungen erfüllen, gleichwahrscheinlich sind. Nun wird über das Mikrozellengitter ein Makrozellengitter gelegt, so daß jede dieser Makrozellen viele Mikrozellen enthält. Die Kernidee in Lynden-Bell's Theorie ist nun, die unter den genannten Voraussetzungen für die Verteilung auf die Mikrozellen wahrscheinlichste Verteilung der Phasenraumelemente auf die Makrozellen zu berechnen. Diese Verteilung wird über jede Makrozelle gemittelt. Als Ergebnis erhält Lynden-Bell eine Fermi-Dirac Verteilung

$$f_{LB1}(\vec{r}, \vec{v}) = \eta \frac{\exp(-\beta h - \alpha)}{1 + \exp(-\beta h - \alpha)} \quad (2.7)$$

α und β sind die Lagrange-Parameter für die Massen- und Energieerhaltung, h bezeichnet die Energie pro Einheitsmasse

$$h = \frac{v^2}{2} + \psi \quad (2.8)$$

Das Gravitationspotential ψ ist selbstkonsistent aus der Poisson-Gleichung zu berechnen.

$$\Delta\psi = -4\pi G \int f_{LB1} d^3v \quad (2.9)$$

G bezeichnet die Gravitationskonstante, ψ soll im Unendlichen wie $-1/|\vec{r}|$ gegen Null gehen.

Das oben beschriebene Verfahren ist äquivalent zur Variation eines Funktionals S_{LB} vom Typ (2.1) unter den Nebenbedingungen von Masse- und Energieerhaltung. Dabei liefert die Poisson-Gleichung den Zusammenhang zwischen der Variation

bezüglich ψ und der Variation bezüglich f . Dieses Funktional hat die Gestalt

$$S_{LB} = - \int \frac{f}{\eta} \ln \frac{f}{\eta} + \frac{\eta - f}{\eta} \ln \frac{\eta - f}{\eta} d^3 r d^3 v \quad (2.10)$$

Lynden-Bell identifiziert die Phasenraumdicke η der Anfangsverteilung mit der Phasenraumdicke zur Zeit der Sternentstehung und schätzt mit Hilfe von Stabilitätsüberlegungen ab, daß für reale Systeme $f \ll \eta$ gelten sollte. In diesem Spezialfall verschwindender Entartung reduziert sich (2.7) auf den Ausdruck

$$f_{LB2}(\vec{r}, \vec{v}) = \eta \exp(-\beta h - \alpha) \quad (2.11)$$

Für allgemeinere Anfangsverteilungen der Form

$$f_0 = \begin{cases} \eta_i & \text{in } \Omega_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.12)$$

(Ω_i , $i = 1, \dots, J$: endliche Gebiete im Phasenraum mit $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ für $i \neq j$) erhält Lynden-Bell mit seiner Theorie analog als wahrscheinlichsten makroskopischen Zustand

$$f_{LB3}(\vec{r}, \vec{v}) = \sum_i \eta_i \frac{\exp(-\frac{\eta_i}{\bar{\eta}} \beta h - \alpha_i)}{1 + \sum_i \exp(-\frac{\eta_i}{\bar{\eta}} \beta h - \alpha_i)} \quad (2.13)$$

mit

$$\bar{\eta} = \frac{\sum_i \eta_i^2 \Omega_i}{\sum_i \eta_i \Omega_i}$$

Die Nebenbedingungen sind hierbei die Erhaltung der Gesamtenergie und der Massen $M_i = \eta_i \Omega_i$. β und α_i sind die entsprechenden Lagrangeparameter.

Die Ausdrücke (2.7), (2.11) und (2.13) geben jeweils die Gestalt der Verteilungsfunktionen an. Sie sind jeweils Teil eines Gleichungssystems, zu dem noch die entsprechende Poisson-Gleichung und die Gleichungen für Masse- und Energieerhaltung gehören. Für die drei oben diskutierten Fälle der Lynden-Bell Statistik hat man also die Lösung (f, ψ, α, β) des entsprechenden Gleichungssystems zu bestimmen, um den Endzustand eines dynamisch relaxierenden Systems wirklich beschreiben zu können.

2.2 Lösungen der Lynden-Bell Statistik

2.2.1 Der Spezialfall verschwindender Entartung

Lynden-Bell (1967) diskutiert nur das Lösungsverhalten des Spezialfalls verschwindender Entartung. Er schreibt (2.11) in der Form

$$f_{LB2} = A \exp(-\beta h) \quad (2.14)$$

mit einer Konstanten A und stellt fest, daß (2.14) keine Systeme mit endlicher Gesamtmasse beschreibt.

Lynden-Bell zieht aus dieser Tatsache den Schluß, daß die Anwendung seiner Theorie auf reale Systeme aus zwei Gründen zumindest für den Fall $f \ll \eta$ eingeschränkt ist:

- (i) Die Grundannahmen seiner Statistik über die gleiche Wahrscheinlichkeit der Mikrozustände sind für reale Systeme nicht über den gesamten Relaxationszeitraum erfüllt, so daß die Systeme tatsächlich nicht vollständig relaxieren.
- (ii) Reale Systeme sind nicht isoliert, für ihre zeitliche Entwicklung sind auch Wechselwirkungen mit benachbarten Systemen von Bedeutung.

Wir wollen hier zunächst ebenfalls für den Spezialfall verschwindender Entartung, dann aber auch für die allgemeineren Fälle das Lösungsverhalten etwas ausführlicher diskutieren. Die Verteilungsfunktion (2.11) liefert, wie schon von Lynden-Bell

festgestellt, für beliebiges ψ eine divergierende Gesamtmasse. Dies ergibt sich sofort aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \int f_{LB2} d^3 r d^3 v &= \int \eta \exp(-\beta h - \alpha) d^3 r d^3 v \\ &\geq \int \eta \exp\left(-\beta \frac{v^2}{2} - \alpha\right) d^3 r d^3 v \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die rechte Seite der Ungleichung divergiert für jeden endlichen Wert von α und β . (Bei der Abschätzung haben wir $\beta \geq 0$ vorausgesetzt; für $\beta < 0$ erhält man trivial eine divergierende Gesamtmasse, siehe hierzu auch Kapitel 2.3.)

Somit hat das von Lynden-Bell hergeleitete Variationsproblem für den Spezialfall verschwindender Entartung keine Lösung. Der Grund hierfür ist, daß die Näherung $f \ll \eta$ für die Verteilungsfunktion äquivalent ist zu dem Übergang von dem Funktional S_{LB} zur Boltzmann-Entropie S_B , von der man weiß, daß sie zur Berechnung von Endzuständen dynamisch relaxierender Systeme ungeeignet ist. An dieser Stelle möchten wir noch daraufhinweisen, daß in (2.14) A keine Konstante ist, sondern ein Funktional von ψ . In der korrekten Schreibweise lautet f_{LB2} nach Eliminieren von α

$$f_{LB2} = \frac{\exp(-\beta h)}{\int \exp(-\beta h) d^3 r d^3 v} \quad (2.16)$$

2.2.2 Die allgemeineren Fälle der Lynden-Bell Statistik

Das Lösungsverhalten des Gleichungssystems, bestehend aus (2.7), der Poisson-Gleichung und den Gleichungen für Masse- und Energieerhaltung, das sich aus der Variation des von Lynden-Bell für Anfangsverteilungen vom Typ (2.6) hergeleiteten Funktionals (2.10) ergibt, wird in der Literatur nicht näher diskutiert. Aber auch hier sieht man leicht durch eine Abschätzung (wieder mit $\beta \geq 0$, siehe (2.15)), daß dieses Problem für beliebig vorgegebene Masse und Energie keine Lösung hat.

$$\begin{aligned} \int f_{LB1} d^3 r d^3 v &= \int \eta \frac{\exp(-\beta h - \alpha)}{1 + \exp(-\beta h - \alpha)} d^3 r d^3 v \\ &= \int \eta \frac{1}{1 + \exp(\beta h + \alpha)} d^3 r d^3 v \\ &\geq \int \eta \frac{1}{1 + \exp(\beta \frac{v^2}{2} + \alpha)} d^3 r d^3 v \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die rechte Seite der Ungleichung (2.17) wollen wir nun genauer betrachten und schreiben hierfür den Ausdruck formal als Grenzwert.

$$\int \eta \frac{1}{1 + \exp(\beta \frac{v^2}{2} + \alpha)} d^3 r d^3 v = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \int_0^R \int r^2 \eta \frac{1}{1 + \exp(\beta \frac{v^2}{2} + \alpha)} dr d^3 v \quad (2.18)$$

Wir sehen, daß der Grenzwert (2.18) für alle Werte von α und β divergiert. Insbesondere gilt damit auch

$$\lim_{\alpha, \beta \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi \int_0^R \int r^2 \eta \frac{1}{1 + \exp(\beta \frac{v^2}{2} + \alpha)} dr d^3 v = \infty \quad (2.19)$$

Die Situation ist jedoch anders, wenn man die Grenzprozesse in (2.19) in umgekehrter Reihenfolge durchführt.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\alpha, \beta \rightarrow \infty} 4\pi \int_0^R \int r^2 \eta \frac{1}{1 + \exp(\beta \frac{v^2}{2} + \alpha)} dr d^3v = 0 \quad (2.20)$$

Die Grenzübergänge sind nicht vertauschbar. Für die Verteilungsfunktion f_{LB1} heißt das, daß sie die Bedingung der Massenerhaltung nur dann erfüllen kann, wenn man von vornherein den Grenzübergang $\alpha, \beta \rightarrow \infty$ vollzieht. Tatsächlich existieren dann Lösungen des Lynden-Bell'schen Variationsproblems. Um diese zu konstruieren, schreiben wir (2.7) in der Form

$$f_{LB1} = \eta \frac{\exp(-\beta(h - \hat{h}))}{1 + \exp(-\beta(h - \hat{h}))} \quad (2.21)$$

mit

$$\hat{h} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Man erkennt, daß (2.21) für $\alpha, \beta \rightarrow \infty$, mit α/β endlich, äquivalent ist zu einer Sprungfunktion

$$f_{LB1} = \eta \Theta(\hat{h} - h) \quad (2.22)$$

mit

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.23)$$

Wählt man nun eine Verteilungsfunktion vom Typ (2.22) und berechnet selbstkonsistent aus der Poisson-Gleichung das entsprechende Gravitationspotential, so hat man

einen Zustand mit einer Energie E_0 und einer Masse M_0 , der eine exakte Lösung des Lynden-Bell'schen Variationsproblems darstellt, wenn man gerade die Energie E_0 und die Masse M_0 vorgibt. Eine solche Lösung ist im Sinne von Lynden-Bell vollständig entartet ($f = \eta$).

Schließlich können wir auch für den allgemeinen Fall in Lynden-Bell's Theorie, dem Fall (2.13), im Prinzip dieselbe Abschätzung wie in (2.15) bzw. (2.17) (mit $\beta \geq 0$) durchführen. Es ist

$$\begin{aligned} \int f_{LB3} d^3r d^3v &= \int \sum_i \eta_i \frac{\exp(-\frac{\eta_i}{\eta} \beta h - \alpha_i)}{1 + \sum_i \exp(-\frac{\eta_i}{\eta} \beta h - \alpha_i)} d^3r d^3v \\ &\geq \int \sum_i \eta_i \frac{\exp(-\frac{\eta_i}{\eta} \beta \frac{v^2}{2} - \alpha_i)}{1 + \sum_i \exp(-\frac{\eta_i}{\eta} \beta \frac{v^2}{2} - \alpha_i)} d^3r d^3v \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die rechte Seite der Ungleichung divergiert für alle endlichen Werte von α_i und β , so daß auch hier nur für spezielle Anfangsbedingungen Lösungen existieren können.

2.3 Variation allgemeiner entropieähnlicher konkaver Funktionale

Wir haben gezeigt, daß das von Lynden-Bell hergeleitete Funktional S_{LB} (2.10) nicht geeignet ist, den Endzustand eines dynamisch relaxierenden Systems durch Variation unter den Nebenbedingungen konstanter Masse und Energie zu berechnen. Tremaine et al. (1986) regen an, nach anderen, besser geeigneten entropieähnlichen konkaven Funktionalen im Sinne von (2.1) zu suchen. Sie zeigen, daß jedes Funktional der Form (2.1) für jedes makroskopische Gleichgewicht als Endzustand dynamischer Relaxation einen höheren Wert hat als für einen beliebigen Anfangszustand. Sie argumentieren, daß es zu jedem Endzustand der Form $f(h)$ ein geeignetes entropieähnliches Funktional geben sollte, so daß dieser Endzustand Lösung des entsprechenden Variationsproblems mit Energie- und Massenerhaltung als Nebenbedingung ist.

Dieser Idee folgen Dejonghe (1987) und Richestone und Tremaine (1988). Dejonghe schlägt als möglicherweise geeignetes Funktional die Jaynes-Entropie S_J vor, die eine a priori Kenntnis f_p über den Endzustand berücksichtigt.

$$S_J = - \int f \ln \frac{f}{f_p} d^3 r d^3 v \quad (2.25)$$

Richestone und Tremaine wählen ein anderes, ihnen geeignet erscheinendes konkaves Funktional vom Typ (2.1), geben aber für ihr Variationsproblem neben Masse und Energie als Nebenbedingung unter anderem ein ad hoc angenommenes Dichteprofil vor.

Wir wollen im folgenden untersuchen, ob man überhaupt für irgendein Funktional der Form (2.1) durch Variation unter den Nebenbedingungen gegebener Masse und Energie Lösungen finden kann.

Wir zeigen zunächst, daß die Vorgabe einer beliebigen endlichen Masse M für Verteilungsfunktionen des Typs $f = f(h)$ bedeutet, daß notwendig gelten muß

$$f(h) \equiv 0 \quad \forall h > 0 \quad (2.26)$$

Es ist

$$M = \int f(h) d^3 r d^3 v \quad (2.27)$$

$$= 4\pi \int f(h) v^2 dv d^3 r \quad (2.28)$$

Wechsel der Integrationsvariablen liefert

$$M = 4\pi \int \int_{\psi}^{\infty} f(h) \sqrt{2(h-\psi)} dh d^3 r \quad (2.29)$$

$$= 4\pi \int \int_{\psi}^0 f(h) \sqrt{2(h-\psi)} dh d^3 r + 4\pi \int \int_0^{\infty} f(h) \sqrt{2(h-\psi)} dh d^3 r \quad (2.30)$$

Nun schätzen wir ab

$$M \geq 0 + 4\pi \int \int_0^{\infty} f(h) \sqrt{2(h-\psi)} dh d^3 r \quad (2.31)$$

$$\geq 4\pi \int \int_0^{\infty} f(h) \sqrt{2h} dh d^3 r \quad (2.32)$$

Der Integrand auf der rechten Seite der Ungleichung hängt nicht von $\vec{r}$ ab. Daher muß für $h > 0$ die Funktion $f(h)$ identisch verschwinden, damit die rechte Seite der Ungleichung nicht divergiert.

Wir betrachten nun die erste Variation eines beliebigen konkaven Funktional vom Typ (2.1) unter den Nebenbedingungen Masse- und Energieerhaltung. In (2.1) ist $C(f)$ eine konvexe Funktion mit $C(0) = 0$. Wir benutzen Definition (2.3) für konvex, d. h. für alle f, f' muß gelten $C(f') - C(f) \geq (f' - f)C'(f)$. Nullsetzen von f bzw. von f' liefert die Beziehungen

$$C(f) \geq fC'(0) \quad (2.33)$$

und

$$C(f) \leq fC'(f) \quad (2.34)$$

Hieraus folgt sofort

$$C'(f) \geq C'(0) \quad (2.35)$$

Wir bilden die erste Variation eines Funktional $S = - \int C(f) d^3 r d^3 v$ unter den Nebenbedingungen Masse- und Energieerhaltung und setzen sie zu Null. Wir erhalten

$$C'(f^*) = -\alpha - \beta h \quad (2.36)$$

f^* sei die Lösung dieser Gleichung, α und β sind wieder die Lagrangeparameter für Masse- und Energieerhaltung. Definition (2.4) für konvex liefert zusammen mit (2.36)

$$-\beta \left(\frac{df^*}{dh} \right)^{-1} \geq 0 \quad (2.37)$$

Da die Gesamtmasse endlich sein soll, kann $\frac{df^*}{dh}$ nicht nur positiv sein. Daher muß für den konstanten Lagrange-Parameter β gelten

$$\beta > 0 \quad (2.38)$$

(Den Fall $\beta = 0$ können wir vernachlässigen, da f^* dann nicht mehr an beliebig vorgegebene Masse und Energie angepaßt werden kann; siehe auch Tremaine et al. (1986).) Aus (2.35) und (2.36) folgt

$$-\alpha - \beta h \geq C'(0) \quad \forall h \quad (2.39)$$

Da (2.39) für beliebige und damit insbesondere beliebig große Werte von h erfüllt sein muß, heißt das

$$C'(0) = -\infty \quad (2.40)$$

Betrachten wir nun (2.36) mit $f^* = f^*(h)$, so sieht man, daß genau zwei Fälle eintreten können, damit (2.40) erfüllt wird:

(i) $f^*(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow \infty$ mit $f^*(h) > 0$ für alle $h < \infty$

Das widerspricht jedoch (2.26), d.h. $\int f^*(h) d^3 r d^3 v$ divergiert.

(ii) $f^*(h) \equiv 0$ für $h > h'$

Für $h' \leq 0$ ist jetzt zwar (2.26) erfüllt, aber um (2.40) zu erfüllen, muß gelten $\alpha = \infty$ oder $\beta = \infty$.

Das aber bedeutet, daß zumindest ein Lagrangeparameter nicht frei ist, um f^* an eine beliebig vorgegebene Masse oder Energie anzupassen. In dieser Situation sind,

wie oben im Zusammenhang mit dem Funktional S_{LB} diskutiert, nur in singulären Fällen für ganz bestimmte Werte von Masse bzw. Energie Lösungen möglich.

Insgesamt können wir also feststellen, daß der Endzustand eines dynamisch relaxierenden Systems nicht bestimmt werden kann, indem man ein geeignet erscheinendes Funktional vom Typ (2.1) unter den Nebenbedingungen von Energie- und Masseerhaltung variiert.

Ein denkbarer Ausweg aus dieser Schwierigkeit könnte in der Berücksichtigung von weiteren ad hoc Annahmen wie z. B. der Vorgabe eines endlichen Radius oder geeigneter Dichteprofile als zusätzliche Nebenbedingungen liegen (siehe Richstone und Tremaine, 1988; White und Narayan, 1987; Stiavelli und Bertin, 1987). Die Hinweise der numerischen Untersuchungen (z. B. Shlosman et al., 1979; Hoffman et al., 1979; van Albada, 1982; May und van Albada, 1984) auf den Einfluß der Anfangszustände auf die Endzustände deuten jedoch daraufhin, daß derartige Bedingungen für unterschiedliche Systeme individuell formuliert werden müssen und eine weitergehende Kenntnis über die tatsächliche Dynamik voraussetzen. Ein solcher Ansatz scheint uns nicht sehr aussichtsreich, um zu einem grundlegenden Verständnis von dynamischer Relaxation zu gelangen. Wir wollen daher im folgenden eine grundlegend neue Theorie zur dynamischen Relaxation stoßfrei selbstgravitierender Materie vorstellen.

3. Ein neues Konzept

3.1 Voraussetzungen

Bevor wir das Konzept unseres Modells beschreiben, fassen wir zunächst Voraussetzungen und Grundlagen zusammen.

Wir betrachten stoßfrei selbstgravitierende Systeme im Rahmen der klassischen Newtonschen Mechanik. Diese Systeme seien vollständig isoliert, d. h. wir schließen Wechselwirkungen mit anderen Systemen aus. Die Gesamtmasse M_0 , die Gesamtenergie E_0 , der Gesamtimpuls P_0 und der Gesamtdrehimpuls L_0 sind konstant. Wir beschränken uns hier auf den Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses ($L_0 = 0$), den Gesamtimpuls P_0 setzen wir ohne Einschränkung zu Null.

Hinsichtlich der Entwicklung elliptischer Galaxien bedeutet dies, daß wir ihre Entwicklung für Zeiten $t > t^*$ beschreiben, für die keine Massenverluste mehr auftreten und das System seine Endenergie erreicht hat. Prozesse, die mit einer Änderung der Gesamtmasse beziehungsweise der Gesamtenergie verbunden sind, sollen zu früheren Zeiten stattgefunden haben und jetzt abgeschlossen sein.

$f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ bezeichnet die Massenverteilungsfunktion im 6-dimensionalen Phasenraum (μ -Raum), d.h. $f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3rd^3v$ ist die Masse im Phasenraumelement d^3rd^3v .

Für eine Zeit t_0 ($t_0 > t^*$) geben wir uns einen beliebigen Anfangszustand f_0 vor

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}) = f(\vec{r}, \vec{v}, t_0) \quad (3.1)$$

Das zugehörige Gravitationspotential ψ_0 ergibt sich aus der Poisson-Gleichung

$$\Delta\psi_0(\vec{r}) = 4\pi G \int f_0(\vec{r}, \vec{v}) d^3v \quad (3.2)$$

Für $t > t_0$ wird die Dynamik des Systems durch die stoßfreie Boltzmann-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \nabla\psi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (3.3)$$

zusammen mit der Poisson-Gleichung

$$\Delta\psi(\vec{r}, t) = 4\pi G \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (3.4)$$

bestimmt, wobei (3.3) und (3.4) selbstkonsistent zu lösen sind. ψ soll im Unendlichen wie $-1/|\vec{r}|$ verschwinden.

(3.3) und (3.4) erhalten die obengenannten Konstanten der Bewegung. Insbesondere bleibt die Gesamtenergie während der zeitlichen Entwicklung erhalten

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

mit

$$E = E_{kin} + E_{pot} \quad (3.6)$$

Dabei bezeichnet E_{kin} die gesamte kinetische Energie des Systems

$$E_{kin} = \int \frac{v^2}{2} f d^3r d^3v \quad (3.7a)$$

E_{pot} gibt die gesamte potentielle Energie an

$$E_{pot} = -\frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r \quad (3.7b)$$

Mit Hilfe der Poisson-Gleichung (3.4) können wir E auch schreiben als

$$E = \int h f(\xi) d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r \quad (3.8)$$

mit

$$\xi = (\vec{r}, \vec{v}) \quad d\xi = d^3r d^3v$$

$h = \frac{v^2}{2} + \psi$ bezeichnet wieder die Energie pro Einheitsmasse. Für unsere Zwecke wird sich die Schreibweise (3.8) für die Gesamtenergie als besonders geeignet erweisen.

Im Rahmen der exakten, stoßfreien Dynamik ist die Entropie konstant. Ferner bleibt die Phasenraumdicke erhalten. Die Erhaltung der Phasenraumdicke können wir durch die Erhaltung einer reduzierten Verteilungsfunktion $g(\varphi)$ beschreiben. Diese können wir für einen beliebig vorgegebenen Anfangszustand f_0 wie folgt konstruieren.

Wir bestimmen das Phasenvolumen $\varphi(g)$, für das gilt $f_0 > g$

$$\varphi(g) = \int \Theta(f_0(\xi) - g) d\xi \quad (3.9)$$

Θ ist die in (2.23) definierte Sprungfunktion. Nach Konstruktion ist $\varphi(g)$ monoton, so daß wir die Umkehrfunktion $g(\varphi)$ bilden können

$$\varphi(g) \longrightarrow g(\varphi) \quad (3.10)$$

Diese reduzierte Verteilungsfunktion $g(\varphi)$ wollen wir im folgenden "Gedächtnisfunktion" nennen, da sie (zusammen mit der Energie) die gesamte Information über den Anfangszustand enthält, die in der exakten, stoßfreien Dynamik erhalten bleibt. Wir beschränken uns dabei auf solche Verteilungsfunktionen, für die $g(\varphi)$ einen kompakten Träger besitzt, d. h. $\varphi(0) = \hat{\varphi} < \infty$.

Zum Schluß wollen wir noch eine Bemerkung zum Begriff des Abstandes zwischen zwei Zuständen f_1 und f_2 machen. Wir können im Zustandsraum eine Metrik $d(f_1, f_2)$ definieren

$$d(f_1, f_2) = \left| \frac{E_1 - E_2}{E_n} \right| + d_t \quad (3.11)$$

E_1 und E_2 sind die Energien der beiden betrachteten Zustände, E_n ist eine beliebige, feste Normierung. d_t bezeichnet die triviale Metrik (Forster, 1977), d. h.

$$d_t = \begin{cases} 0 & \text{falls die Zustände } (f_1, f_2) \text{ identisch sind} \\ 1 & \text{falls die Zustände } (f_1, f_2) \text{ verschieden sind} \end{cases} \quad (3.12)$$

Im folgenden werden wir den Begriff des Abstandes zweier Zustände jedoch in einem mathematisch schwächeren Sinne gebrauchen. Für einen gegebenen Zustand f_0 mit der Energie E_0 interessiert uns nur die Energiedifferenz zu Zuständen einer bestimmten Klasse, so daß wir in diesem Zusammenhang die Begriffe Abstand oder Entfernung für den energetischen Unterschied verwenden werden.

3.2 Grundlagen des Konzepts

Unser Modell für dynamische Relaxation weicht von der Grundidee her völlig von Lynden-Bell's Theorie und den anderen bisher diskutierten Ansätzen ab. Wir suchen kein geeignet erscheinendes entropieähnliches Funktional, um durch Variation mit Nebenbedingungen die Endzustände dynamischer Relaxation zu bestimmen. In unserer Theorie gehen wir vielmehr davon aus, daß der Relaxationsprozeß von dem Anteil ΔE der Gesamtenergie E abhängen muß, der bei dem Übergang von der mikroskopischen, exakten, stoßfreien Dynamik zu einer Beschreibung auf makroskopischen Skalen von Nichtgleichgewichtsenergie in Gleichgewichtsenergie umgesetzt werden muß. Das heißt, die Zunahme der Entropie durch kollektive Dissipation hängt von der Menge ΔE der dabei umgesetzten Energie ab.

Für einen gegebenen Anfangszustand f_0 ist ΔE gerade die Energiemenge, die als Nichtgleichgewichtsenergie das System hindert, im Rahmen der exakten, stoßfreien Dynamik gemäß (3.3) und (3.4) in ein global stabiles Gleichgewicht einzulaufen. Unsere Theorie basiert daher auf dem Gedanken, für einen beliebig vorgegebenen Anfangszustand zunächst zu untersuchen, wie weit dieser Anfangszustand im Rahmen der exakten Dynamik von einem global stabilen Gleichgewicht entfernt ist.

Daß dieses Vorgehen vernünftig ist, sieht man schon an einem ganz einfachen Beispiel. Denken wir uns einen Anfangszustand, der selber schon ein global stabiles Gleichgewicht ist ($\Delta E = 0$). Dann wird das System sicher nicht aus diesem Gleichgewicht "herausrelaxieren".

Die Entropiezunahme durch dynamische Relaxation wird somit davon abhängen müssen, ob ein gegebener Anfangszustand sehr nahe an einem global stabilen Gleichgewicht liegt oder sehr weit davon entfernt ist. Der Endzustand hängt in diesem Sinne mehr oder weniger stark von dem Anfangszustand ab, die Information über den Anfangszustand (oder das Gedächtnis an den Anfangszustand) bleibt unterschiedlich stark erhalten.

Hier stellt sich natürlich die Frage, ob und wie wir für einen beliebigen Anfangszustand ΔE bestimmen können? Für einfache mechanische Systeme mit nur wenigen Freiheitsgraden ist die Antwort wohlbekannt. Denken wir an einen eindimensionalen Oszillator mit Reibung in einem Potential V (Abb. 2).

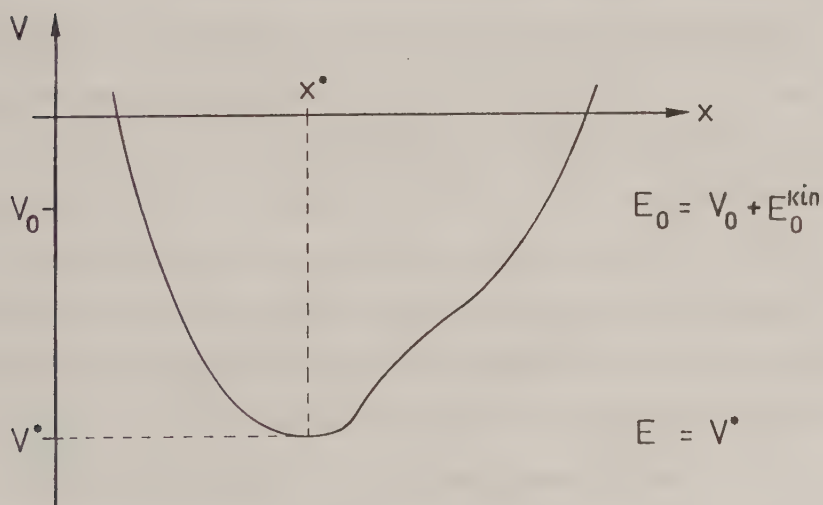


Abbildung 2. Potential eines eindimensionalen Oszillators

Zu einer Anfangszeit t_0 hat das System eine bestimmte kinetische Energie E_0^{kin} , potentielle Energie $E_0^{pot} = V_0$ und somit die Gesamtenergie $E_0 = E_0^{kin} + V_0$. Das global stabile Gleichgewicht, in das der Oszillator hineinrelaxieren wird, hat die Energie $E = V^*$, die Energie des absoluten Minimums des Potentials. Die kinetische Energie im Gleichgewicht verschwindet ($E_{kin} = 0$) und die bei der Relaxation dissipierte Energie ist $\Delta E = E_0 - V^*$. Das global stabile Gleichgewicht ist der Zustand minimaler Energie, den wir im folgenden als das zum Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht bezeichnen werden.

Wir wollen nun versuchen, ein dynamisch relaxierendes System soweit wie möglich analog zu behandeln und dynamische Relaxation suggestiv als zeitasymptotisches Einschwingen in ein makroskopisches Gleichgewicht verstehen.

Natürlich sind einer analogen Behandlung zu einem einfachen Oszillator Grenzen gesetzt. So können die von uns betrachteten Systeme wegen der Energieerhaltung nicht in das zum Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht hineinrelaxieren, vorausgesetzt, dieses existiert überhaupt zu jedem Anfangszustand. Die Energie ΔE wird durch kollektive Dissipation innerhalb des Systems von Nichtgleichgewichtsenergie in Gleichgewichtsenergie umgewandelt und geht nicht verloren. Im Laufe der zeitlichen Entwicklung des Systems muß daher die Energie des jeweiligen instantanen assoziierten Gleichgewichts anwachsen. Wenn ΔE vollständig dissipiert ist, soll das System einen global stabilen Gleichgewichtszustand der Energie E_0 erreicht haben (Abb. 3).

Die Beschreibung dieses Dissipationsprozesses ist nicht der Gegenstand dieser Arbeit; in Kapitel 8 werden wir nur kurz ein entsprechendes Szenario skizzieren.

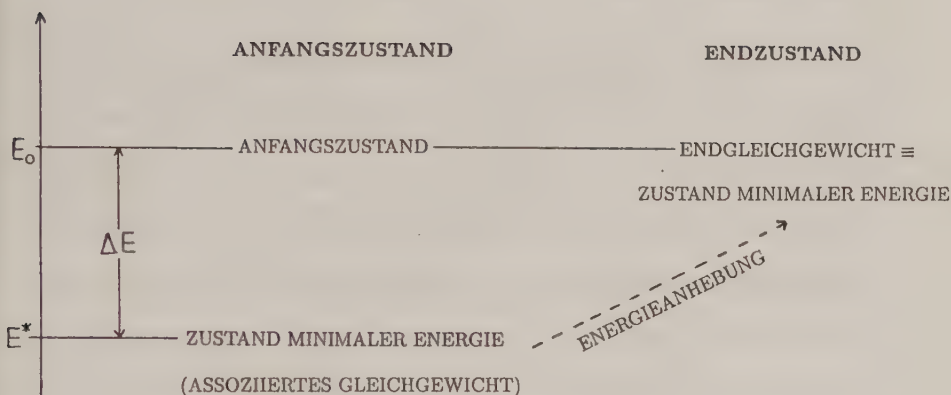


Abbildung 3. Zusammenhang zwischen Anfangszustand, assoziiertem Gleichgewicht und Endgleichgewicht. E^* bezeichnet die Energie des assoziierten Gleichgewichts.

Wir stellen uns in dieser Arbeit die Frage, ob die oben beschriebene Idee sich überhaupt realisieren läßt. Wir müssen beweisen, daß zu jedem beliebig vorgegebenen Anfangszustand ein assoziiertes Gleichgewicht existiert. Ferner müssen wir zeigen, wie man es eindeutig konstruieren kann, um so tatsächlich die Energie ΔE bestimmen zu können. Erst die Klärung dieser Fragen sichert das Fundament unserer Theorie, auf dem aufbauend dann Modelle für den Dissipationsprozeß entwickelt werden können.

4. Herleitung einer verallgemeinerten kinetischen und einer verallgemeinerten potentiellen Energie

Anders als bei Systemen mit nur wenigen Freiheitsgraden verschwindet für die hier betrachteten Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden und langreichweitigen Wechselwirkungen die kinetische Energie E_{kin} im Gleichgewicht im allgemeinen nicht. Wir können also nicht wie bei dem einfachen Oszillator das assoziierte Gleichgewicht als Minimum der potentiellen Energie bestimmen. Daher ist für unsere Zwecke die übliche Darstellung (3.6) der Gesamtenergie als Summe von kinetischer Energie und potentieller Energie ungeeignet.

Aber wir können eine verallgemeinerte kinetische Energie T und eine verallgemeinerte potentielle Energie W konstruieren, die gerade die typischen Eigenschaften der kinetischen und potentiellen Energie einfacher mechanischer Systeme mit wenigen Freiheitsgraden besitzen; d. h. die verallgemeinerte kinetische Energie ist immer positiv und verschwindet im Gleichgewicht,

$$T \geq 0 \quad (4.1a)$$

$$T = 0 \quad \text{im Gleichgewicht,}$$

die erste Variation der verallgemeinerten potentiellen Energie verschwindet im Gleichgewicht und das Vorzeichen der zweiten Variation bestimmt die lokale Stabilität

$$\delta W = 0 \quad \text{im Gleichgewicht} \quad (4.1b)$$

$$\delta^2 W > 0 \quad (\text{für alle geeignet definierten Störungen}) \Rightarrow \text{Stabilität}$$

(Die Störungen müssen insbesondere im Rahmen der stoßfreien Theorie zulässig sein.)

Bei der Konstruktion dieser verallgemeinerten kinetischen und verallgemeinerten potentiellen Energie machen wir von einigen Techniken Gebrauch, die von Schindler und Goldstein (1983) für die Diskussion nichtlinearer Stabilität von Plasmen entwickelt wurden.

Wir schreiben die Gesamtenergie in der Form (3.8)

$$E = \int h f(\xi) d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r$$

und fassen E formal als Funktional von f und ψ auf

$$E = E_{f,\psi} \tag{4.2}$$

Dann minimieren wir $E_{f,\psi}$ bezüglich f für beliebiges, aber festes ψ . Da wir für einen beliebig vorgegebenen Anfangszustand f_0 das assoziierte Gleichgewicht als global stabiles Gleichgewicht im Rahmen der exakten stoßfreien Dynamik definiert haben, müssen wir dabei als Nebenbedingung die Erhaltung der Phasenraumdichte $g(\varphi)$ aus (3.10) berücksichtigen. Wir bilden also

$$\min_{f \in \Phi_{f_0}} E_{f,\psi} = \min_{f \in \Phi_{f_0}} \int h f(\xi) d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r \tag{4.3}$$

$$= \int h f_{\psi}^*(\xi) d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r \tag{4.4}$$

Dabei ist Φ_{f_0} der Raum der Zustände, die durch eine inkompressible Abbildung von f_0 im Phasenraum zugänglich sind. $f_{\psi}^*(\xi)$ bezeichnet die minimierende Verteilungsfunktion.

Der Ausdruck (4.4) ist ein Funktional von ψ und kann als verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ betrachtet werden

$$W_\psi = \int h f_\psi^*(\xi) d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r \quad (4.5)$$

Man sieht, daß W_ψ einen Anteil der kinetischen Energie E_{kin} enthält. Die verallgemeinerte kinetische Energie ist dann gegeben durch

$$T_\psi = \int h f(\xi) d\xi - \int h f_\psi^*(\xi) d\xi \geq 0 \quad (4.6)$$

Offensichtlich gilt

$$E = T_\psi + W_\psi \quad (4.7)$$

In (4.4) haben wir die Minimierung von $E_{f,\psi}$ bezüglich f bei festem ψ formal durchgeführt. Für den Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses ($L = 0$) wollen wir die Konstruktion der minimierenden Verteilungsfunktion $f_\psi^*(\xi)$ explizit durchführen.

Hierfür bestimmen wir für beliebiges, festes ψ das Phasenvolumen $\varphi_\psi(h)$, für das gilt $h' < h$

$$\varphi_\psi(h) = \int \Theta(h - h'(\xi)) d\xi \quad (4.8)$$

$\Theta(x)$ ist die Sprungfunktion (2.23). $\varphi_\psi(h)$ ist monoton, so daß wir die Umkehrfunktion $h_\psi(\varphi)$ bilden können.

$$\varphi_\psi(h) \longrightarrow h_\psi(\varphi) \quad (4.9)$$

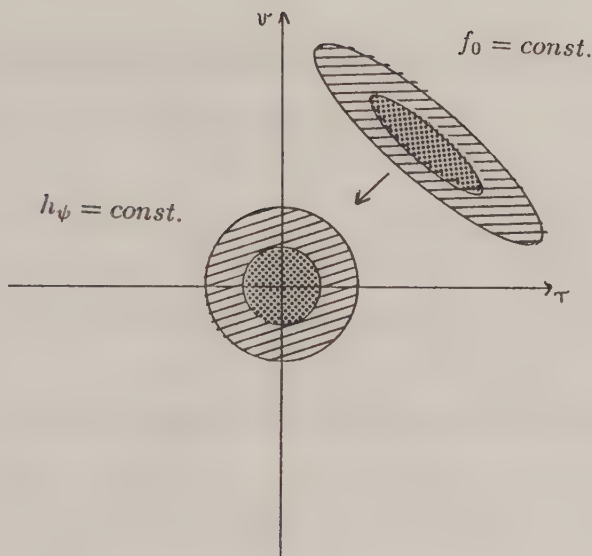


Abbildung 4. Konstruktion der minimierenden Verteilungsfunktion $f_\psi^*(h)$.

In (3.9) haben wir das Phasenvolumen $\varphi(g)$ berechnet, wo für die vorgegebene Anfangsverteilung gilt $f_0 > g$. Nun können wir die minimierende Verteilungsfunktion $f_\psi^*(\xi)$ konstruieren, indem wir phasenvolumenerhaltend den größten Werten von g die kleinsten Werte von h zuordnen (Abb. 4).

Wir erhalten

$$f_\psi^*(h_\psi(\varphi)) = g(\varphi) \quad (4.10a)$$

beziehungsweise

$$f_\psi^*(h) = g(\varphi_\psi(h)) \quad (4.10b)$$

Wir können also die verallgemeinerte kinetische Energie schreiben als

$$T_\psi = \int h f(\xi) d\xi - \int h f_\psi^*(h) d\xi \quad (4.11)$$

und entsprechend die verallgemeinerte potentielle Energie

$$W_\psi = \int h f_\psi^*(h) d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r \quad (4.12)$$

Mit (4.10a) und einem Wechsel der Integrationsvariablen erhalten wir W_ψ in der Form

$$W_\psi = \int h_\psi(\varphi) g(\varphi) d\varphi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r \quad (4.13)$$

Die so konstruierten Ausdrücke für die verallgemeinerte kinetische und verallgemeinerte potentielle Energie sind direkt analog zur kinetischen und potentiellen Energie einfacher mechanischer Systeme; (4.1a) und (4.1b) sind erfüllt.

5. Die gleichmäßige Beschränktheit von W_ψ und ihre Konsequenzen

5.1 Beweis der gleichmäßigen Beschränktheit von W_ψ

Das wesentliche Element in unserer Theorie ist die Existenz eines assoziierten Gleichgewichts zu jedem beliebigen (nichtsingulären) Anfangszustand im Rahmen der stoßfreien Dynamik. Dieses assoziierte Gleichgewicht ist global stabil in dem Sinne, daß es der Zustand ist, für den die verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ ihr absolutes Minimum annimmt. In Kapitel 6.2 werden wir die Stabilität ausführlicher diskutieren. Es ist daher von entscheidender Bedeutung zu zeigen, daß W_ψ für jeden beliebigen Anfangszustand tatsächlich ein absolutes Minimum hat. Das heißt, wir müssen zeigen, daß W_ψ gleichmäßig nach unten beschränkt ist. Diesen Beweis wollen wir im folgenden führen.

Gegeben sei ein beliebiger Anfangszustand f_0 mit endlicher Masse M_0 und Energie E_0 . Mit Hilfe von (3.9) und (3.10) können wir die zugehörige Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$ bestimmen. Der maximale Wert $\hat{g}$ von $g(\varphi)$

$$\hat{g} = \max g(\varphi) \tag{5.1}$$

soll endlich sein ($\hat{g} < \infty$). $g(\varphi)$ soll einen kompakten Träger besitzen, d. h. es gibt ein endliches maximales Phasenvolumen $\hat{\varphi} = \varphi(0) < \infty$. Ferner soll $\hat{\varphi} > 0$ sein. Durch die Voraussetzung, daß $\hat{\varphi}$ und $\hat{g}$ endlich sein sollen, schließen wir singuläre Grenzfälle wie z.B. δ -funktionsartige Konzentrationen entlang einer oder mehrerer Phasenraumrichtungen aus. Ein Beispiel für eine solche Anfangsverteilung wäre ein

System, das im Ortsraum auf einer Kugelschale von infinitesimaler Dicke konzentriert ist und bei dem alle Teilchen dieselbe, rein radiale Geschwindigkeit besitzen.

Dem maximalen Phasenvolumen $\hat{\varphi}$ können wir zu jedem beliebigen ψ mit Hilfe von (4.8) und (4.9) den entsprechenden Wert von h zuordnen, den wir mit $\hat{h}_\psi$ bezeichnen. (4.8) liefert die Beziehung

$$\hat{\varphi} = \int \Theta(\hat{h}_\psi - h_\psi(\xi)) d\xi \quad (5.2)$$

Da h von $\vec{v}$ nur über v^2 abhängt, können wir schreiben

$$\hat{\varphi} = 4\pi \int \Theta(\hat{h}_\psi - h_\psi(\vec{r}, v)) v^2 dv d^3r \quad (5.3)$$

Wir führen die Integration über v über in eine Integration über h (mit $\psi(\vec{r}) \leq h \leq \hat{h}_\psi$) und erhalten

$$\hat{\varphi} = 4\pi\sqrt{2} \int d^3r \Theta(\hat{h}_\psi - \psi) \int_\psi^{\hat{h}_\psi} \Theta(\hat{h}_\psi - h) (h - \psi)^{1/2} dh \quad (5.4)$$

Die Integration über h können wir ausführen und erhalten die Beziehung zwischen $\hat{\varphi}$ und $\hat{h}_\psi$ in der Form

$$\hat{\varphi} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \int \Theta(\hat{h}_\psi - \psi) (\hat{h}_\psi - \psi)^{3/2} d^3r \quad (5.5)$$

Aus der Bedingung, daß die Gesamtmasse endlich sein soll, folgt

$$\hat{h}_\psi \leq 0 \quad (5.6)$$

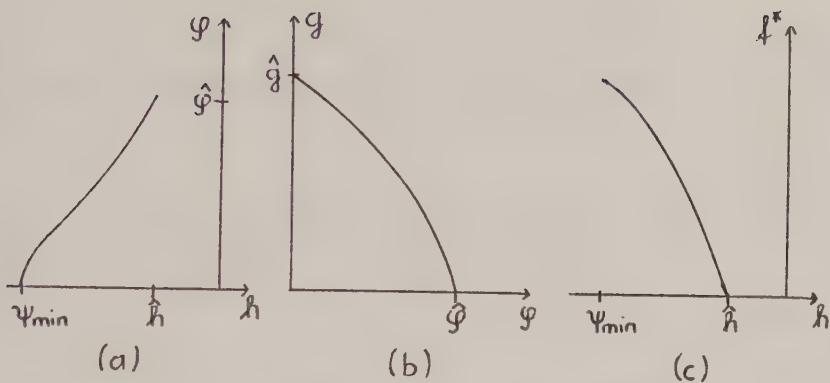


Abbildung 5. Typischer Verlauf der Funktionen (a) $\varphi(h)$, (b) $g(\varphi)$ und (c) $f^*(h)$. $\psi_{\min}$ bezeichnet das Minimum von ψ .

Wir wollen nun W_ψ nach unten abschätzen, wobei wir die Erhaltung von $g(\varphi)$ berücksichtigen. Wir vernachlässigen im folgenden den Index ψ bei h , $\hat{h}$ und f^* . Um das Verständnis der folgenden Abschätzungen zu erleichtern, zeigen wir in Abbildung 5 den typischen Verlauf der Funktionen $\varphi(h)$, $g(\varphi)$ und $f^*(h)$.

Mit (4.12) und (5.6) können wir W_ψ schreiben als

$$W_\psi = \int \Theta(\hat{h} - h) h f^*(h) d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3r \quad (5.7)$$

Der maximale Wert $\hat{g}$ von $g(\varphi)$ aus (5.1) ist auch der maximale Wert von $f^*(h) = g(\varphi(h))$. Damit gilt wegen (5.6)

$$W_\psi \geq \hat{g} \int \Theta(\hat{h} - h) h \, d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r \quad (5.8)$$

Wie bei (5.4) ersetzen wir die v -Raum Integration durch eine Integration über h und erhalten

$$W_\psi \geq 4\pi\sqrt{2}\hat{g} \int d^3r \Theta(\hat{h} - \psi) \int_\psi^{\hat{h}} h(\hat{h} - h)^{1/2} dh + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r \quad (5.9)$$

Ausführen der h - Integration liefert

$$W_\psi \geq \frac{8\pi\sqrt{2}}{15} \hat{g} \int \Theta(\hat{h} - \psi) (3\hat{h} + 2\psi) (\hat{h} - \psi)^{3/2} d^3r + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r \quad (5.10)$$

Den ersten Summanden formen wir elementar um und schreiben

$$W_\psi \geq \frac{8\pi\sqrt{2}}{15} \hat{g} \int \Theta(\hat{h} - \psi) (5\hat{h} - 2(\hat{h} - \psi)) (\hat{h} - \psi)^{3/2} d^3r + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} W_\psi \geq \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \hat{g} \hat{h} \int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{3/2} d^3r - \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} \hat{g} \int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{5/2} d^3r \\ + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nun benutzen wir die Erhaltung des maximalen Phasenvolumens $\hat{\varphi}$ und schreiben mit Hilfe von (5.5)

$$W_\psi \geq \hat{g} \hat{\varphi} \hat{h} - \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} \hat{g} \int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{5/2} d^3r + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r \quad (5.13)$$

Wir setzen voraus, daß alle vorkommenden Integrale existieren. Damit können wir den zweiten Term mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung abschätzen. Für integrable Funktionen $u(\vec{r})$ und $v(\vec{r})$ lautet die Höldersche Ungleichung

$$\int |u v| d^3 r \leq \left(\int u^p d^3 r \right)^{1/p} \left(\int v^q d^3 r \right)^{1/q} \quad (5.14)$$

mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q > 1$$

Wir setzen $p = 3/2$, $q = 3$, $u = (\hat{h} - \psi)$, $v = (\hat{h} - \psi)^{3/2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} W_\psi &\geq \hat{g} \hat{\varphi} \hat{h} \\ &\quad - \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} \hat{g} \left[\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{3/2} d^3 r \right]^{2/3} \left[\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3 r \right]^{1/3} \\ &\quad + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r \end{aligned} \quad (5.15)$$

Nun benutzen wir wiederum (5.5) und können schreiben

$$\begin{aligned} W_\psi &\geq \hat{g} \hat{\varphi} \hat{h} - \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} \left(\frac{3}{8\pi\sqrt{2}} \right)^{2/3} \hat{g} \hat{\varphi}^{2/3} \left[\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3 r \right]^{1/3} \\ &\quad + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi)^2 d^3 r \end{aligned} \quad (5.16)$$

Den 3. Summanden können wir mit Hilfe der Sobolev Ungleichung (Rosen, 1971) abschätzen. Wir benutzen hierfür die Sobolev Ungleichung in der Form

$$\int (\nabla \psi)^2 d^3 r \geq \beta \left(\int (-\psi)^6 d^3 r \right)^{1/3} \quad (5.17)$$

mit

$$\beta = 3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{4/3} \approx 5.478$$

Wir erhalten

$$W_\psi \geq \hat{g}\hat{\varphi}\hat{h} - \frac{16\pi\sqrt{2}}{15} \left(\frac{3}{8\pi\sqrt{2}} \right)^{2/3} \hat{g}\hat{\varphi}^{2/3} \left[\int \Theta(\hat{h} - \psi)(\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3r \right]^{1/3} + \frac{\beta}{8\pi G} \left(\int (-\psi)^6 d^3r \right)^{1/3} \quad (5.18)$$

Den dritten Term spalten wir auf und schätzen ihn nach unten ab. Dabei machen wir von folgenden Ungleichungen Gebrauch:

$$-\psi > \hat{h} - \psi \quad (5.19)$$

$$-\psi > -\hat{h} \quad (5.20)$$

$$\int u(\vec{r}) d^3r \geq \int S(\hat{h} - \psi) u(\vec{r}) d^3r \quad (5.21)$$

mit

$$u(\vec{r}) \geq 0$$

Es gilt

$$\left(\int (-\psi)^6 d^3r \right)^{1/3} = \frac{1}{2} \left(\int (-\psi)^6 d^3r \right)^{1/3} + \frac{1}{2} \left(\int (-\psi)^6 d^3r \right)^{1/3} \quad (5.22)$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi)(-\psi)^6 d^3r \right)^{1/3} + \frac{1}{2} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi)(-\psi)^6 d^3r \right)^{1/3} \quad (5.23)$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi)(\hat{h} - \psi)^6 d^3r \right)^{1/3} + \frac{1}{2} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi)(\hat{h} - \psi)^{3/2} (-\psi)^{9/2} d^3r \right)^{1/3} \quad (5.24)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) ((\hat{h} - \psi)^{3/2})^4 d^3 r \right)^{1/3} + \frac{1}{2} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{3/2} (-\psi)^{9/2} d^3 r \right)^{1/3} \quad (5.25)$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) ((\hat{h} - \psi)^{3/2})^4 d^3 r \right)^{1/3} + \frac{1}{2} (-\hat{h})^{3/2} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{3/2} d^3 r \right)^{1/3} \quad (5.26)$$

und wiederum mit Hilfe von (5.5)

$$\left(\int (-\psi)^6 d^3 r \right)^{1/3} \geq \frac{1}{2} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) ((\hat{h} - \psi)^{3/2})^4 d^3 r \right)^{1/3} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8\pi\sqrt{2}} \right)^{1/3} (-\hat{h})^{3/2} \hat{\varphi}^{1/3} \quad (5.27)$$

Einsetzen von (5.27) in (5.18) liefert dann schließlich folgende Abschätzung für W_ψ

$$\begin{aligned} W_\psi \geq W_\psi^b &= \hat{g} \hat{\varphi} \hat{h} + \frac{\beta}{32\pi G} \left(\frac{3}{\pi\sqrt{2}} \right)^{1/3} \hat{\varphi}^{1/3} (-\hat{h})^{3/2} \\ &\quad - \frac{4\sqrt{2}}{15} \left(\frac{9\pi}{2} \right)^{1/3} \hat{g} \hat{\varphi}^{2/3} \left[\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3 r \right]^{1/3} \\ &\quad + \frac{\beta}{16\pi G} \left[\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^6 d^3 r \right]^{1/3} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Der zweite und vierte Term auf der rechten Seite der Ungleichung sind positiv, der erste und dritte Term sind negativ. Man sieht, daß die positiven Terme für große Werte von $(-\hat{h})$ oder $(\hat{h} - \psi)$ stärker anwachsen als die negativen. Somit ist die verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ gleichmäßig nach unten beschränkt.

Im Anhang berechnen wir für W_ψ eine explizite untere Schranke. Es gilt

$$W_\psi \geq K \hat{g}^3 G^2 \hat{\varphi}^{7/3} = W_{min}^b \quad (5.29)$$

mit

$$K \approx -69$$

Obwohl wir die Diskussion im wesentlichen auf den Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses ($L = 0$) beschränken, wollen wir unsere Theorie grundsätzlich auch auf Systeme mit endlichem Gesamtdrehimpuls anwenden. Wir weisen daher daraufhin, daß die verallgemeinerte potentielle Energie auch für Systeme mit endlichem Drehimpuls ($L \neq 0$) gleichmäßig nach unten beschränkt ist. Dies ist trivial, denn für Systeme mit $L \neq 0$ haben wir bei der Konstruktion der entsprechenden verallgemeinerten potentiellen Energie die Energie $E_{f,\psi}$ bezüglich f für festes ψ nicht nur unter der Bedingung der Erhaltung der Phasenraumdichte zu minimieren, sondern als zusätzliche Bedingung die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses L zu beachten. Diese zusätzliche Bedingung bedeutet eine Einschränkung des Raumes der zulässigen Testfunktionen. Daher gilt

$$W_{\psi}^{L \neq 0} \geq W_{\psi}^{L=0} \quad (5.30)$$

5.2 Beweis, daß stoßfrei selbstgravitierende Systeme nicht in eine Singularität kollabieren können

Die gleichmäßige Beschränktheit der verallgemeinerten potentiellen Energie nach unten ermöglicht einen allgemeinen Beweis, daß unter den in 5.1 genannten Voraussetzungen ein stoßfrei selbstgravitierendes System weder als ganzes noch in Teilen in eine Singularität kollabieren kann. Das Argument, daß die Erhaltung der Phasenraumdicke einen Kollaps verhindern sollte, ist zwar physikalisch plausibel, jedoch nicht zwingend, da eine immer weitergehende Kontraktion des Ortsraumvolumens durch eine Ausdehnung im Geschwindigkeitsraum kompensiert werden kann.

Lynden-Bell (1967) weist daraufhin, daß man dynamische Relaxation überhaupt nur diskutieren könne, wenn man als a priori Annahme den Kollaps zumindest eines Teils des Systems ausschließt und voraussetzt, daß ein Gleichgewicht existiert. Er beschreibt als prinzipiell denkbare Szenario ein System mit einem in eine Singularität kollabierenden Kern und einem sich immer weiter ausdehnendem Halo. Masse und Energie bleiben dabei konstant. Dieser gravothermische Katastrophe genannte Prozeß wurde erstmals 1962 von Antonov diskutiert. Auch White und Narayan (1987) betonen, daß man diesen Prozeß durch zusätzliche Annahmen ausschließen muß.

Sygné et al. (1984) schließen aus der stoßfreien Stabilität sphärisch symmetrischer Gleichgewichte mit $f = \alpha \exp(-\beta h)$ (Antonov, 1961; Lynden-Bell und Sanitt, 1969; Kuksrud und Mark, 1970; Bartholomew, 1971; Gillon et al, 1976; Seboldt, 1981), daß selbstgravitierende Systeme generell stoßfrei nicht kollabieren können.

Dieses Argument ist unserer Meinung nach jedoch kein ausreichender Beweis, denn ein dynamisch relaxierendes System durchläuft während seiner zeitlichen Entwicklung Nichtgleichgewichtszustände. Das Problem ist eigentlich, ob im Verlauf der stoßfreien Dynamik ein Kollaps möglich ist und nicht, ob ein Endgleichgewicht stoßfrei stabil ist.

Hier wollen wir nun allgemein beweisen, daß ein stoßfrei selbstgravitierendes System unter den Voraussetzungen des vorigen Abschnitts nicht kollabieren kann.

Wir betrachten ein vollständig isoliertes System im Phasenraum. Die Grenzen des Systems legen wir hinreichend weit entfernt fest, so daß kein Teil des Systems diese Grenzen auf den interessierenden Zeitskalen erreichen kann. Wir spalten das System in zwei Teile auf, von denen der eine Teil immer mehr in eine $1/|\vec{r}|$ - Singularität kollabieren soll. Die Zeitabhängigkeit dieses Prozesses ersetzen wir durch die Abhängigkeit von einem Folgeparameter α .

Wir spalten das Potential $\psi^\alpha(\vec{r})$ in die Anteile $\psi_1^\alpha(\vec{r})$ und $\psi_2^\alpha(\vec{r})$ auf, entsprechend den Dichten $\varrho_1^\alpha(\vec{r})$ und $\varrho_2^\alpha(\vec{r})$ der beiden Systemteile. Es ist also

$$\psi^\alpha(\vec{r}) = \psi_1^\alpha(\vec{r}) + \psi_2^\alpha(\vec{r}) \quad (5.31)$$

mit

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \psi_1^\alpha(\vec{r}) \sim -\frac{1}{|\vec{r}|} \quad (5.32)$$

Die Gesamtenergie und die Gesamtmasse des Systems sollen konstant sein, wir setzen jedoch nicht voraus, daß die Energien und Massen der beiden Systemteile erhalten bleiben.

Die verallgemeinerte potentielle Energie des (Gesamt)systems ist entsprechend

(5.7)

$$W_{\psi}^{\alpha} = \int \Theta(\hat{h} - h) f^*(\xi) h d\xi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \psi^{\alpha})^2 d^3 r \quad (5.33)$$

Den letzten Term schreiben wir trivial um

$$W_{\psi}^{\alpha} = \int \Theta(\hat{h} - h) f^*(\xi) h d\xi + \frac{1}{16\pi G} \int (\nabla \psi^{\alpha})^2 d^3 r + \frac{1}{16\pi G} \int (\nabla \psi^{\alpha})^2 d^3 r \quad (5.34)$$

Wir wissen, daß (5.33) gleichmäßig nach unten beschränkt ist mit einer unteren Schranke W_{min}^b . Für die Beschränktheit des Funktional W_{ψ}^{α} ist der genaue Faktor vor dem $\int (\nabla \psi^{\alpha})^2 d^3 r$ - Term unerheblich. Daher folgt aus der Beschränktheit von W_{ψ}^{α} direkt, daß auch das Funktional $\tilde{W}_{\psi}^{\alpha}$ mit

$$\tilde{W}_{\psi}^{\alpha} = \int \Theta(\hat{h} - h) f^*(\xi) h d\xi + \frac{1}{16\pi G} \int (\nabla \psi^{\alpha})^2 d^3 r \quad (5.35)$$

gleichmäßig nach unten beschränkt ist. Analog zu dem im Anhang beschriebenen Verfahren erhält man hier als untere Schranke

$$\tilde{W}_{\psi}^{\alpha} \geq \tilde{W}_{min}^b = 4W_{min}^b \quad (5.36)$$

Da mit (5.32) gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int (\nabla \psi^{\alpha})^2 d^3 r \rightarrow \infty \quad (5.37)$$

haben wir also

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} W_{\psi}^{\alpha} \rightarrow \infty \quad (5.38)$$

Nach Konstruktion der verallgemeinerten potentiellen Energie W_ψ und der verallgemeinerten kinetischen Energie T_ψ (4.5), (4.6) und (4.7)) sind nur solche Zustände für das System zugänglich, für die $W_\psi \leq E_0$ gilt. (5.38) liefert also einen Widerspruch zur Energieerhaltung.

Wir wollen dieses Resultat der Klarheit halber auch direkt für die übliche kinetische Energie E_{kin} (3.7a) und potentielle Energie E_{pot} (3.7b) diskutieren. Wir schätzen W_ψ^α mit Hilfe von (5.34) und (5.36) nach unten ab und erhalten

$$W_\psi^\alpha \geq 4W_{min}^b - \frac{1}{2}E_{pot} \quad (5.39)$$

Es gilt $W_\psi^\alpha \leq E_0$ und $E_{kin} + E_{pot} = E_0$. Ferner soll gelten $E_0 \leq 0$. Somit liefert (5.39) direkt die folgenden Abschätzungen für die kinetische und die potentielle Energie

$$E_{pot} \geq 8W_{min}^b \quad (5.40)$$

und

$$E_{kin} \leq -8W_{min}^b \quad (5.41)$$

Die gleichmäßige Beschränktheit von W_ψ hat also die Konsequenz, daß auch die gesamte potentielle Energie und die gesamte kinetische Energie des Systems beschränkt sind. Das steht im Widerspruch zur Divergenz der potentiellen Energie ($E_{pot} \rightarrow -\infty$) bei einem Kollaps des Systems oder eines Teils des Systems in eine Singularität.

6. Das assoziierte Gleichgewicht

6.1 Bestimmung des assoziierten Gleichgewichts

Die Tatsache, daß W_ψ gleichmäßig nach unten beschränkt ist, stellt sicher, daß zu jedem beliebigen Anfangszustand f_0 mit der Masse M_0 und der Energie E_0 ein assoziiertes Gleichgewicht existiert. Die verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ ist ein Funktional über einem unendlichdimensionalen Raum; denken wir uns hier jedoch einen beliebigen Schnitt, so können wir prinzipiell denselben typischen Potentialverlauf zeichnen wie in Abbildung 2 für den eindimensionalen Oszillator (Abb. 6).

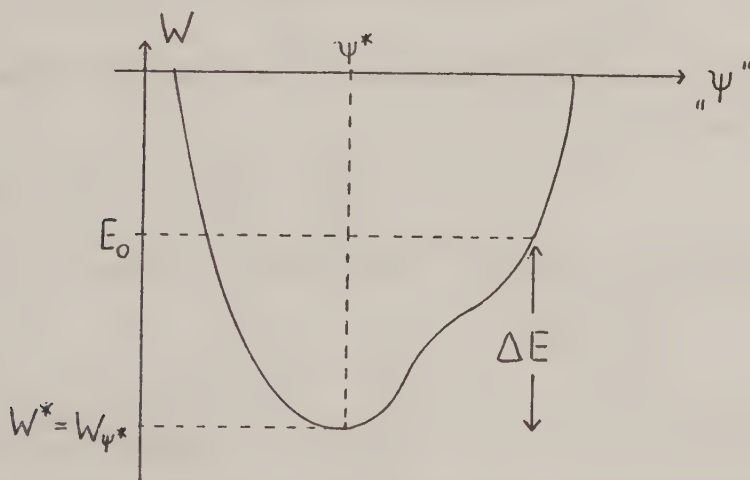


Abbildung 6. Schematische Darstellung der verallgemeinerten potentiellen Energie W_ψ als Funktional von ψ . E_0 bezeichnet die Energie eines vorgegebenen Anfangszustandes, $W^* = W_{\psi^*}$ das absolute Minimum von W_ψ .

Das assoziierte Gleichgewicht entspricht dem absoluten Minimum W^* von W_ψ bei $\psi = \psi^*$. Diesen Zustand wollen wir nun bestimmen.

Hierfür variieren wir das Funktional W_ψ bezüglich ψ . Technisch gehen wir bei dieser Variation analog zu dem von Schindler und Goldstein (1983) bei einer Stabilitätsuntersuchung von Plasmen benutzten Verfahren vor. Wie bei der Minimierung von $E_{f,\psi}$ bezüglich f haben wir auch hier bei der Variation als Bedingung die Erhaltung der Phasenraumdichte zu beachten. Dabei ist es nützlich, W_ψ in der Form (4.13) zu benutzen.

$$W_\psi = \int h_\psi(\varphi)g(\varphi)d\varphi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\psi)^2 d^3r$$

Sei nun $\tilde{\psi}$ ein beliebiger Gleichgewichtszustand. Aus (4.8) und (4.9) folgt das entsprechende $\tilde{h}(\varphi)$ mit

$$\tilde{h}(\varphi) = h_{\tilde{\psi}}(\varphi) \quad (6.1)$$

Wir machen einen linearen Störungsansatz mit $\psi = \tilde{\psi} + \psi_1$ und erhalten für W_ψ

$$W_{\tilde{\psi}+\psi_1} = \int h_{\tilde{\psi}+\psi_1}(\varphi)g(\varphi)d\varphi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla\tilde{\psi} + \nabla\psi_1)^2 d^3r \quad (6.2)$$

Die Störungen ψ_1 sollen für $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ hinreichend stark gegen Null gehen, damit alle vorkommenden Integrale existieren. Die Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$ bleibt wegen der Erhaltung der Phasenraumdichte bei der Störung unverändert. Wir linearisieren zunächst $h_{\tilde{\psi}+\psi_1}$.

$$h_{\tilde{\psi}+\psi_1} = \tilde{h}(\varphi) + h_1(\varphi) \quad (6.3)$$

$h_{\tilde{\psi}+\psi_1}(\varphi)$ ist Umkehrfunktion von $\varphi_{\tilde{\psi}+\psi_1}(h)$. (4.8) liefert

$$\varphi_{\tilde{\psi}+\psi_1}(h) = \int \Theta\left(h - \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi} + \psi_1\right)\right) d^3r d^3v \quad (6.4)$$

In (6.4) betrachten wir nun φ als unabhängige Variable und setzen für festes φ die Linearisierung (6.3) ein.

$$\varphi = \int \Theta\left(\tilde{h}(\varphi) + h_1(\varphi) - \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}\right) - \psi_1\right) d^3r d^3v \quad (6.5)$$

Wir entwickeln (6.5) bis zur ersten Ordnung und erhalten

$$\varphi = \int \left(\Theta\left(\tilde{h}(\varphi) - \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}\right)\right) + \delta\left(\tilde{h}(\varphi) - \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}\right)\right)(h_1(\varphi) - \psi_1) \right) d^3r d^3v \quad (6.6)$$

Aus (6.6) folgt für den Term in 1. Ordnung

$$0 = \int \delta\left(\tilde{h}(\varphi) - \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}\right)\right)(h_1(\varphi) - \psi_1) d^3r d^3v \quad (6.7)$$

Somit kann $h_1(\varphi)$ als Mittelwert von ψ_1 geschrieben werden.

$$h_1(\varphi) = \langle \psi_1(\vec{r}) \rangle = \frac{\int \delta\left(\tilde{h}(\varphi) - \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}\right)\right) \psi_1(\vec{r}) d^3r d^3v}{\int \delta\left(\tilde{h}(\varphi) - \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}\right)\right) d^3r d^3v} \quad (6.8)$$

Einsetzen von (6.3) in (6.2) liefert

$$W_{\tilde{\psi}+\psi_1} = \int (\tilde{h}(\varphi) + h_1(\varphi)) g(\varphi) d\varphi + \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla \tilde{\psi} + \nabla \psi_1)^2 d^3r \quad (6.9)$$

Durch Linearisieren ergibt sich als Term erster Ordnung

$$W_1 = \int h_1(\varphi) g(\varphi) d\varphi - \frac{1}{4\pi G} \int \nabla \psi_1 \nabla \tilde{\psi} d^3r \quad (6.10)$$

Auf den zweiten Summanden wenden wir den Greenschen Satz an und erhalten

$$W_1 = \int h_1(\varphi)g(\varphi)d\varphi - \frac{1}{4\pi G} \int \psi_1 \Delta \tilde{\psi} d^3 r \quad (6.11)$$

Nun setzen wir (6.8) in (6.11) ein.

$$W_1 = \int \frac{\delta(\tilde{h}(\varphi) - (\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}))\psi_1(\tilde{r})d^3 r d^3 v}{\int \delta(\tilde{h}(\varphi) - (\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}))d^3 r d^3 v} g(\varphi)d\varphi - \frac{1}{4\pi G} \int \psi_1 \Delta \tilde{\psi} d^3 r \quad (6.12)$$

Für den ersten Summanden von (6.12) ändern wir die Integrationsvariable und gehen von der Integration über φ zu einer Integration über $\tilde{h}$ über. Mit (4.10a) erhalten wir

$$W_1 = \int \frac{\delta(\tilde{h}(\varphi) - (\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}))\psi_1(\tilde{r})d^3 r d^3 v}{\int \delta(\tilde{h}(\varphi) - (\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}))d^3 r d^3 v} f_{\tilde{\psi}}^*(\tilde{h}) \frac{d\varphi}{d\tilde{h}} d\tilde{h} - \frac{1}{4\pi G} \int \psi_1 \Delta \tilde{\psi} d^3 r \quad (6.13)$$

Aus Gleichung (4.8) erhalten wir für $\frac{d\varphi}{d\tilde{h}}$

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{h}} = \int \delta(\tilde{h} - (\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}))d^3 r d^3 v \quad (6.14)$$

Einsetzen von (6.14) in (6.13) liefert

$$W_1 = \int \delta(\tilde{h}(\varphi) - (\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}))\psi_1(\tilde{r})f_{\tilde{\psi}}^*(\tilde{h})d\tilde{h}d^3 r d^3 v - \frac{1}{4\pi G} \int \psi_1 \Delta \tilde{\psi} d^3 r \quad (6.15)$$

Die Integration über $\tilde{h}$ können wir sofort ausführen und erhalten schließlich

$$W_1 = \int \psi_1(\tilde{r})f_{\tilde{\psi}}^*(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi})d^3 r d^3 v - \frac{1}{4\pi G} \int \psi_1(\tilde{r})\Delta \tilde{\psi} d^3 r \quad (6.16)$$

Notwendige Bedingung dafür, daß W_ψ für $\psi = \tilde{\psi}$ ein Minimum hat, ist, daß W_1 für beliebige Störungen ψ_1 verschwindet. Es muß also gelten

$$\Delta\tilde{\psi} = 4\pi G \int f_\psi^* \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi} \right) d^3v \quad (6.17)$$

Dies ist die nichtlineare Poisson-Gleichung für Gleichgewichtszustände mit einer Verteilungsfunktion $f_\psi^*(h)$. Mathematisch gesehen ist (6.17) eine nichtlineare Integro-differentialgleichung, die die Potentialfunktionen $\tilde{\psi}$ bestimmt, für die W_ψ stationär ist.

Da W_ψ gleichmäßig nach unten beschränkt ist, wird W_ψ für ein $\psi = \psi^*$ sein Infimum annehmen. Um das assoziierte Gleichgewicht zu berechnen, müssen wir nun unter den Lösungen $\tilde{\psi}$ von (6.17) die Lösung ψ^* bestimmen, die diesem absoluten Minimum W^* von W_ψ entspricht. Das assoziierte Gleichgewicht wird dann beschrieben durch

$$f_{\psi^*}^*(h) = g(\varphi_{\psi^*}(h)) \quad (6.18)$$

mit

$$\Delta\psi^* = 4\pi G \int f_{\psi^*}^* \left(\frac{v^2}{2} + \psi^* \right) d^3v \quad (6.19)$$

Die Energie des assoziierten Gleichgewichts ist W^* und wir können den energetischen Abstand $\Delta E = E_0 - W^*$ eines gegebenen Anfangszustandes zu dem Zustand kleinster Energie berechnen, der mit der Erhaltung der Phasenraumdicke verträglich ist. Wir können also die Energie berechnen, die ein dynamisch relaxierendes System durch kollektive Dissipation umsetzen muß, um einen makroskopischen Gleichgewichtszustand

zu erreichen, und haben somit die Grundlage für die Entwicklung von Modellrelaxationen gelegt, die diese Kenntnis benutzen.

6.2 Stabilität des assoziierten Gleichgewichts

In diesem Abschnitt wollen wir beweisen, daß das assoziierte Gleichgewicht im Rahmen der stoßfreien Theorie global stabil ist, und zwar für zwei verschiedene, gebräuchliche Begriffe von globaler Stabilität. Die Klasse der zulässigen Störungen Φ_{f_0} umfaßt alle Verteilungsfunktionen f , die durch eine inkompressible Abbildung eines gegebenen Anfangszustandes f_0 , beziehungsweise des zugehörigen assoziierten Gleichgewichts, dargestellt werden können.

Zunächst wollen wir den Begriff der globalen Stabilität im Sinne eines Energieprinzips benutzen (Schindler und Goldstein, 1983). Die globale Stabilität des assoziierten Gleichgewichts folgt direkt aus (4.7) und der Tatsache, daß das assoziierte Gleichgewicht als der Zustand definiert ist, für den die verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ ihr absolutes Minimum annimmt, also

$$W_\psi \geq W_{\psi^*} \quad (6.20)$$

Wir betrachten das zu einem Anfangszustand f_0 gehörende assoziierte Gleichgewicht $f_{\psi^*}^*(h)$ mit der Energie

$$E^* = W_{\psi^*} \quad (6.21)$$

Dieses stören wir im Rahmen der zulässigen Klasse Φ_{f_0} . Nach der Störung hat das System die Energie $\tilde{E}$. Die Energie $\tilde{E}$ des gestörten Systems ist im Verlauf der

stoßfreien Dynamik konstant, der durch die Störung zugeführte Energiezuwachs E_S als Anfangsbedingung fest vorgegeben.

$$E_S = \check{E} - E^* \quad (6.22)$$

Ein Teil dieses Energiezuwachses geht in verallgemeinerte kinetische Energie $T_{\check{\psi}}$, der andere in verallgemeinerte potentielle Energie $W_{\check{\psi}}$.

$$\check{E} = T_{\check{\psi}} + W_{\check{\psi}} \quad (6.23)$$

Die Beziehungen (6.20) und (6.23) liefern nun unmittelbar die Abschätzung

$$T_{\check{\psi}} \leq \check{E} - E^* = E_S \quad (6.24)$$

und wir sehen, daß die verallgemeinerte kinetische Energie des gestörten Systems durch den fest vorgegebenen Energiezuwachs E_S nach oben beschränkt ist.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß das zu einem gegebenen Zustand assoziierte Gleichgewicht auch im Sinne des allgemeineren Stabilitätskriteriums von Lyapunov global stabil ist.

Hierfür benutzen wir die sogenannte zweite (oder direkte) Methode von Lyapunov, wie sie zum Beispiel von Nicolis und Prigogine (1977) oder Haken (1983) angegeben wird. Danach ist ein Gleichgewicht f_e global stabil im Sinne von Lyapunov, wenn man ein Funktional $V_L(f)$ mit folgenden Eigenschaften angeben kann:

$$V_L(f) \geq 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6.25)$$

Ω bezeichnet ein Gebiet um den Ursprung eines geeignet definierten Zustandsraumes Φ ($\Omega \subseteq \Phi$). In unserem Fall ist das Gleichgewicht f_e das zu einem Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht f_{ψ^*} und der Zustandsraum Φ ist die Menge aller phasenraum-dichteerhaltend zugänglichen Zustände Φ_{f_0} . Der Ursprung soll ohne Einschränkung mit dem betrachteten Gleichgewicht zusammenfallen.

$$V_L(f_e) = 0 \quad (6.26)$$

Wird das Gleichgewicht im Rahmen einer Klasse zugänglicher Störungen gestört, so wird das System dynamisch:

$$f_e \longrightarrow f(t)$$

Für das Lyapunov- Funktional $V_L(f(t))$ muß dann gelten

$$\frac{dV_L}{dt} \leq 0 \quad (6.27)$$

Wir können nun sofort ein Lyapunov- Funktional angeben, das die obigen Bedingungen (6.25), (6.26) und (6.27) erfüllt, nämlich die Energie E_S aus (6.22). Wegen der Minimaleigenschaften von $E^* = W_{\psi^*}$ ist (6.25) erfüllt. (6.26) wird trivial erfüllt. Da die Energie $\tilde{E}$ des gestörten Systems im Rahmen der stoßfreien Dynamik konstant ist, ist E_S zeitlich konstant, so daß auch (6.27) erfüllt ist. Als Gebiet Ω um das assoziierte Gleichgewicht lassen wir dabei den gesamten Raum Φ_{f_0} zu.

6.3 Monotonie von W_ψ bezüglich der Lösungen der Poisson-Gleichung

Abschließend wollen wir in diesem Kapitel einen Punkt behandeln, der für die quantitative Berechnung eines assoziierten Gleichgewichts von Interesse ist. Wir haben gezeigt, daß das Funktional W_ψ für solche Potentialfunktionen ψ stationär wird, die Lösungen der Poisson-Gleichung (6.17) sind. Der Term auf der rechten Seite von (6.17) hängt sowohl explizit wie auch implizit von ψ ab. Eine nichtlineare Poisson-Gleichung dieser Form hat im allgemeinen mehr als nur eine Lösung. Das assoziierte Gleichgewicht ist der Zustand, wo W_ψ sein absolutes Minimum annimmt, da dieser Zustand das global stabile Gleichgewicht ist. Um das assoziierte Gleichgewicht zu berechnen, müssen wir daher aus der Menge der Lösungen $\tilde{\psi}_i$ von (6.17) die Lösung ψ^* bestimmen, für die W_ψ sein absolutes Minimum annimmt.

Wenn nun eine der Lösungen $\tilde{\psi}_i$ von (6.17) die punktweise kleinste Lösung von (6.17) ist, dann ist diese punktweise kleinste Lösung gerade das gesuchte ψ^* , da W_ψ monoton wachsend von den Lösungen von (6.17) abhängt. Es gilt nämlich

$$W_{\tilde{\psi}_1} \leq W_{\tilde{\psi}_2} \quad (6.28)$$

falls für $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ gilt

$$\tilde{\psi}_1(\vec{r}) \leq \tilde{\psi}_2(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \quad (6.29)$$

Diese Eigenschaft von W_ψ werden wir im folgenden beweisen.

Die Lösungen $\tilde{\psi}_i$ der Poisson-Gleichung (6.17) entsprechen Gleichgewichtszuständen $f_{\tilde{\psi}_i}^*(h)$. Daher können wir den Virialsatz anwenden; es gilt also

$$E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}E_{\text{pot}} \quad (6.30a)$$

oder

$$\int \frac{v^2}{2} f_{\tilde{\psi}}^*(h) d^3 r d^3 v = -\frac{1}{4} \int \tilde{\psi} f_{\tilde{\psi}}^*(h) d^3 r d^3 v \quad (6.30b)$$

Für die Lösungen $\tilde{\psi}_i$ von (6.17) schreiben wir die verallgemeinerte potentielle Energie $W_{\tilde{\psi}}$ aus (4.12) in der Form

$$W_{\tilde{\psi}} = \int h f_{\tilde{\psi}}^*(h) d^3 r d^3 v - \frac{1}{2} \int \tilde{\psi} f_{\tilde{\psi}}^*(h) d^3 r d^3 v \quad (6.31)$$

Offensichtlich ist (6.30b) äquivalent zu

$$-\frac{1}{2} \int \tilde{\psi} f_{\tilde{\psi}}^*(h) d^3 r d^3 v = -\frac{2}{3} \int h f_{\tilde{\psi}}^*(h) d^3 r d^3 v \quad (6.32)$$

Einsetzen von (6.32) in (6.31) liefert

$$W_{\tilde{\psi}} = \frac{1}{3} \int h_{\tilde{\psi}} f_{\tilde{\psi}}^*(h) d^3 r d^3 v \quad (6.33)$$

und nach einer Transformation der Integrationsvariablen erhalten wir schließlich

$$W_{\tilde{\psi}} = \frac{1}{3} \int h_{\tilde{\psi}}(\varphi) g(\varphi) d\varphi \quad (6.34)$$

Nun wählen wir zwei Lösungen $\tilde{\psi}_1$ und $\tilde{\psi}_2$ der Poisson-Gleichung (6.17), die die Beziehung (6.29) erfüllen. Aus Gleichung (6.8) wissen wir, daß für kleine Abweichungen $\delta\psi(\vec{r})$ von einem beliebigen $\psi(\vec{r})$ (nicht unbedingt Lösung der Poisson-Gleichung (6.17)) gilt

$$\delta h(\varphi) > 0$$

falls

$$\delta\psi(\vec{r}) > 0 \quad \forall \vec{r} \quad (6.35)$$

Die beiden Lösungen $\tilde{\psi}_1$ und $\tilde{\psi}_2$ verbinden wir nun durch einen geeigneten Weg im Hilbertraum, so daß

$$\tilde{\psi}_2(\vec{r}) = \tilde{\psi}_1(\vec{r}) + \sum_i \delta\psi_i(\vec{r}) \quad (6.36)$$

mit

$$\delta\psi_i(\vec{r}) \geq 0 \quad \forall i$$

Dann ist wegen (6.35)

$$h_{\tilde{\psi}_2}(\varphi) = h_{\tilde{\psi}_1}(\varphi) + \sum_i \delta h_i(\varphi) \quad (6.37)$$

mit

$$\delta h_i(\varphi) \geq 0 \quad \forall i$$

Für zwei Funktionen $\tilde{\psi}_1$ und $\tilde{\psi}_2$, die (6.29) erfüllen, liefern (6.34) und (6.37) offensichtlich das gewünschte Resultat

$$W_{\tilde{\psi}_2} - W_{\tilde{\psi}_1} = \frac{1}{3} \int g(\varphi) [h_{\tilde{\psi}_2}(\varphi) - h_{\tilde{\psi}_1}(\varphi)] d\varphi \geq 0 \quad (6.38)$$

Um das assoziierte Gleichgewicht zu bestimmen, haben wir somit die punktweise kleinste Lösung ψ^* der Poisson-Gleichung (6.17) zu berechnen, falls eine solche punktweise kleinste Lösung existiert.

7. Quantitative Bestimmung assoziierter Gleichgewichte

7.1 Symmetrie des assoziierten Gleichgewichts

Man kann zeigen, daß ein assoziiertes Gleichgewicht im Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses ($L = 0$) sphärisch symmetrisch ist (Aly, 1989). Hierfür betrachten wir zwei Gleichgewichtszustände $f_{\tilde{\psi}_1}^*(h)$ und $f_{\tilde{\psi}_2}^*(h)$ zu derselben reduzierten Verteilungsfunktion $g(\varphi)$.

$$f_{\tilde{\psi}_1}^*(h(\varphi)) = f_{\tilde{\psi}_2}^*(h(\varphi)) = g(\varphi) \quad (7.1)$$

$\tilde{\psi}_1$ und $\tilde{\psi}_2$ sind also Lösungen der Poisson-Gleichung (6.17). $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_1(r)$ soll sphärisch symmetrisch sein, $\tilde{\psi}_2 = \tilde{\psi}_2(\vec{r})$ soll beliebig von der Ortskoordinate $\vec{r}$ abhängen. Das heißt für $f_{\tilde{\psi}_1}^*$ und $f_{\tilde{\psi}_2}^*$

$$f_{\tilde{\psi}_1}^*(h) = f_{\tilde{\psi}_1}^*\left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}_1(r)\right) \quad (7.2a)$$

und

$$f_{\tilde{\psi}_2}^*(h) = f_{\tilde{\psi}_2}^*\left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}_2(\vec{r})\right) \quad (7.2b)$$

Für Lösungen $\tilde{\psi}$ der Poisson-Gleichung (6.17) können wir W_ψ mit Hilfe des Virialsatzes (6.30b) wie folgt schreiben

$$W_{\tilde{\psi}} = \frac{1}{4} \int \tilde{\psi} f_{\tilde{\psi}}^*(h) d^3 r d^3 v \quad (7.3)$$

Die Riez'sche Ungleichung (Lieb, 1977) besagt nun

$$\begin{aligned} & \int \int \frac{f_{\tilde{\psi}_2}^* \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}_2(\vec{r}) \right) f_{\tilde{\psi}_2}^* \left(\frac{v'^2}{2} + \tilde{\psi}_2(\vec{r}') \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r d^3 r' \\ & \leq \int \int \frac{f_{\tilde{\psi}_1}^* \left(\frac{v^2}{2} + \tilde{\psi}_1(r) \right) f_{\tilde{\psi}_1}^* \left(\frac{v'^2}{2} + \tilde{\psi}_1(r') \right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r d^3 r' \end{aligned} \quad (7.4)$$

Das Gleichheitszeichen in (7.4) gilt nur, wenn $f_{\tilde{\psi}_1}^*$ und $f_{\tilde{\psi}_2}^*$ identisch sind. Integriert man beide Seiten der Ungleichung (7.4) über v und v' , so sieht man, daß gilt

$$W_{\tilde{\psi}_1} \leq W_{\tilde{\psi}_2} \quad (7.5)$$

Die Lösung ψ^* von (6.17), die dem absoluten Minimum W^* von W_ψ entspricht, muß also sphärisch symmetrisch sein.

7.2 Verfahren zur Berechnung von assoziierten Gleichgewichten

Um das zu einem gegebenen Anfangszustand f_0 assoziierte Gleichgewicht zu berechnen, müssen wir die Lösung ψ^* der Poisson-Gleichung (6.17) bestimmen, die dem absoluten Minimum der verallgemeinerten potentiellen Energie W_ψ entspricht. Die Tatsache, daß die assoziierten Gleichgewichte im Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses, auf den wir uns hier beschränken, sphärisch symmetrisch sind, erleichtert die Berechnung erheblich.

Als zusätzliche Vereinfachung beschränken wir uns hier auf solche Anfangszustände, die selber nur vom Betrag der Ortsraumvariablen r und vom Betrag der Geschwindigkeit v abhängen. Durch diese Annahme vermindern wir den Aufwand zur Berechnung der Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$.

Für eine gegebene Anfangsverteilung f_0 zur Zeit $t_0 = 0$ berechnen wir zunächst die zugehörigen Werte der verallgemeinerten potentiellen Energie $W_0 = W_{\psi_0}$ und der verallgemeinerten kinetischen Energie $T_0 = T_{\psi_0}$. Damit haben wir dann auch die Energie $E_0 = T_0 + W_0$ des Anfangszustandes bestimmt. Anschließend werden wir das zu dem Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht $f_{\psi^*}^*$ berechnen.

Im ersten Schritt bestimmen wir für die gegebene Anfangsverteilung $f_0(r, v)$ die Funktion $\varphi(g)$ (siehe Gleichung (3.9)). Mit den obigen Annahmen können wir Gleichung (3.9) in der Form schreiben

$$\varphi(g) = 16\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \Theta(f_0(r, v) - g) r^2 v^2 dr dv \quad (7.6)$$

Da φ monoton von g abhängt, erhalten wir die Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$ als Umkehrfunktion von (7.6). Das Gravitationspotential ψ_0 des Anfangszustandes berechnen wir aus der Poisson-Gleichung (3.2)

$$\psi_0(r) = -16\pi^2 G \int_r^\infty \frac{1}{r'^2} \int_0^{r'} r''^2 \int_0^\infty v^2 f_0(r'', v) dv dr'' dr' \quad (7.7)$$

Mit dem Potential ψ_0 aus (7.7) können wir nun das Phasenvolumen $\varphi_{\psi_0}(h)$ aus (4.8) berechnen

$$\varphi_{\psi_0}(h) = 16\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \Theta\left(h - \left(\frac{v^2}{2} + \psi_0(r)\right)\right) r^2 v^2 dr dv \quad (7.8)$$

und damit dann nach (4.10b) die Funktion $f_{\psi_0}^*(h)$

$$f_{\psi_0}^*(h) = g(\varphi_{\psi_0}(h)) \quad (7.9)$$

Die verallgemeinerte kinetische Energie T_0 und die verallgemeinerte potentielle Energie W_0 des Anfangszustandes erhalten wir schließlich aus Gleichung (4.11) bzw. (4.12).

$$T_0 = 16\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{v^2}{2} + \psi_0(r)\right) f_0(r, v) r^2 v^2 dr dv - 16\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h f_{\psi_0}^*(h) r^2 v^2 dr dv \quad (7.10)$$

und

$$W_0 = 16\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h f_{\psi_0}^*(h) r^2 v^2 dr dv + \frac{1}{2G} \int_0^\infty (\nabla \psi_0)^2 r^2 dr \quad (7.11)$$

Wir kommen nun zur Berechnung des assoziierten Gleichgewichts aus der Poisson-Gleichung (6.17). Da das assoziierte Gleichgewicht in dem hier betrachteten Fall

verschwindenden Gesamtdrehimpulses sphärisch symmetrisch ist, können wir (6.17) in der folgenden, vereinfachten Form schreiben.

$$\tilde{\psi}(r) = F_{\tilde{\psi}}(\tilde{\psi}(r)) \quad (7.12)$$

mit

$$F_{\tilde{\psi}}(\tilde{\psi}(r)) = -4\pi G \int_r^\infty \frac{1}{r'^2} \int_0^{r'} \varrho_{\tilde{\psi}}(r'') r''^2 dr'' dr' \quad (7.13)$$

Dabei ist $\varrho_{\tilde{\psi}}$ die der Verteilungsfunktion $f_{\tilde{\psi}}^*(h) = g(\varphi_{\tilde{\psi}}(h))$ entsprechende Massendichte.

$$\varrho_{\tilde{\psi}}(r) = 4\pi \int_0^\infty g(\varphi_{\tilde{\psi}}(h)) v^2 dv \quad (7.14)$$

$$= 4\pi\sqrt{2} \int_{\tilde{\psi}(r)}^0 g(\varphi_{\tilde{\psi}}(h)) \sqrt{h - \tilde{\psi}} dh \quad (7.15)$$

Das Phasenvolumen $\varphi_{\tilde{\psi}}(h)$ erhalten wir aus (4.8).

$$\varphi_{\tilde{\psi}}(h) = 16\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \Theta(h - h') v'^2 r'^2 dr' dv' \quad (7.16)$$

$$= \frac{32}{3} \sqrt{2} \pi^2 \int_0^\infty \Theta(h - \tilde{\psi}(r)) (h - \tilde{\psi}(r))^{3/2} r^2 dr \quad (7.17)$$

Die Energie des assoziierten Gleichgewichts $W^* = W_{\psi^*}$ erhalten wir mit derjenigen Lösung ψ^* von (7.12), die das absolute Minimum von W_ψ liefert. Da ψ^* sphärisch symmetrisch ist, können wir W_{ψ^*} aus (4.12) wie folgt schreiben

$$W_{\psi^*} = 16\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h g(\varphi_{\psi^*}(h)) v^2 r^2 dr dv + \frac{1}{2G} \int_0^\infty (\nabla \psi^*)^2 r^2 dr \quad (7.18)$$

und mit Hilfe der Poisson-Gleichung und einer Variablentransformation

$$W_{\psi^*} = 16\pi^2 \sqrt{2} \int_0^\infty r^2 \int_{\psi^*(r)}^0 h g(\varphi_{\psi^*}(h)) \sqrt{h - \psi^*(r)} dh dr - 2\pi \int_0^\infty \psi^* \varrho_{\psi^*}(r) r^2 dr \quad (7.19)$$

Wir haben nunmehr alle interessierenden Größen in geeigneter Form geschrieben und können darangehen, ψ^* aus (7.12) und (7.13) zu berechnen.

Da wir keine Möglichkeit sehen, Gleichung (7.12) im allgemeinen analytisch zu lösen, werden wir die Lösungen numerisch durch eine einfache Picard-Iteration bestimmen. Die entsprechende Gleichung für die Iterationsfolge erhalten wir direkt aus (7.12)

$$\psi_{n+1}(r) = F_{\psi_n}(\psi_n(r)) \quad (7.20)$$

mit einer geeigneten Startfunktion $\psi_1(r)$ ($0 \geq \psi_1(r) \geq -GM/r$, wobei M die Gesamtmasse ist). Die Abbildungsfunktion F_{ψ_n} müssen wir bei jedem Iterationsschritt mit Hilfe von (7.13), (7.15) und (7.17) berechnen.

Bei der numerischen Durchführung der Iteration benutzen wir ein an die Geometrie des behandelten Problems angepaßtes Gitter in r, v, h, φ und g . Das Gitter in h wird bei jedem Iterationsschritt neu bestimmt. Wir nehmen an, daß sich die gesamte Masse M während der Iteration in einem hinreichend großen, aber endlichen Gebiet des Phasenraums befindet. Dies haben wir bei jedem Iterationsschritt überprüft. Die lokalen Fehler unseres numerischen Verfahrens sind von zweiter Ordnung der Gitterabstände.

Mit dem oben beschriebenen Verfahren suchen wir nun den Fixpunkt ψ^* von Gleichung (7.20), der dem absoluten Minimum von W_ψ entspricht. Die Abbildung F ist jedoch nicht überall monoton, es gilt nicht, daß für jedes Paar (ψ_1, ψ_2) aus $\psi_1(r) \leq \psi_2(r)$ die Beziehung $F_{\psi_1}(\psi_1(r)) \leq F_{\psi_2}(\psi_2(r))$ folgt. Wir wissen daher nicht a priori, ob ein berechneter Fixpunkt $\tilde{\psi}$ von (7.20) der gesuchte minimale Fixpunkt ist (Amann, 1976). Deshalb haben wir die Iterationen jeweils mit verschiedenen Startfunktionen ψ_1 durchgeführt. Für jede Anfangsverteilung haben wir dabei immer nur einen nichttrivialen Fixpunkt unabhängig von der jeweiligen Startfunktion gefunden. Dieser Test und die Einfachheit des Iterationsverfahrens legen die Vermutung nahe, daß die berechneten Fixpunkte tatsächlich auch die minimalen Fixpunkte sind, die somit jeweils dem absoluten Minimum des Funktional W_ψ entsprechen. In jedem Fall wissen wir mit Sicherheit, daß das absolute Minimum der verallgemeinerten potentiellen Energie W_ψ zwischen dem berechneten Wert W_{ψ^*} und der unteren Schranke von W_ψ liegen muß (siehe Anhang und Beispiele in 7.3).

Bei der Berechnung der Beispiele haben wir folgende Normierung benutzt:

- r wird durch einen typischen Wert r_{typ} der Anfangsverteilung normiert. In unseren Beispielen ist dies der Radius r_{typ} , wo die Massendichte der Anfangsverteilung ϱ_0 verschwindet ($\varrho_0(r) = 0$ für $r \geq r_{typ}$).
- v wird durch $\sqrt{GM/r_{typ}}$ normiert; dementsprechend normieren wir ψ durch GM/r_{typ} und die Energien durch GM^2/r_{typ} .
- Die Anfangsverteilung f_0 ist auf 1 normiert, also $\int f_0 d\xi = 1$.

7.3 Beispiele

7.3.1 Erstes Beispiel

In unserem ersten Beispiel wählen wir als Anfangsverteilung f_0 einen Kasten im Phasenraum.

$$f_0(r, v) = \frac{1}{C} \begin{cases} 1 & \text{für } r \leq 1 \wedge v \leq v_{max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.21)$$

f_0 ist in den obengenannten normierten Einheiten geschrieben und der Normierungsfaktor C lautet

$$C = 16\pi^2 \int_0^1 \int_0^{v_{max}} 1 r^2 v^2 dr dv = 16\pi^2 v_{max}^3 / 9 \quad (7.22)$$

Die Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$ hat ebenfalls eine Kastenstruktur

$$g(\varphi) = \frac{1}{C} \begin{cases} 1 & \text{für } \varphi \leq \hat{\varphi} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.23)$$

mit

$$\hat{\varphi} = \frac{16\pi^2 v_{max}^3}{9} \quad (7.24)$$

Somit ist auch $f_\psi^*(h)$ konstant bis zu einem maximalen Wert $\hat{h}_\psi$

$$f_\psi^*(h) = g(\varphi_\psi(h)) = \frac{1}{C} \begin{cases} 1 & \text{für } h \leq \hat{h}_\psi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.25)$$

Der maximale Wert $\hat{h}_\psi$ ergibt sich aus

$$\hat{\varphi} = \frac{32\sqrt{2}}{3} \pi^2 \int_0^\infty \Theta(\hat{h} - \psi(r)) (\hat{h} - \psi(r))^{3/2} r^2 dr \quad (7.26)$$

Wir haben nun mit dem oben beschriebenen numerischen Verfahren für verschiedene Werte von v_{max} ($v_{max} = 0.5; 0.8; 1.0; 1.2$) das zu der entsprechenden Anfangsverteilung f_0 der Form (7.21) assoziierte Gleichgewicht berechnet. Für Anfangsverteilungen dieser speziellen Form kann der Zustand minimaler Energie auch explizit analytisch bestimmt werden (Doremus et al., 1969; Bouvier und Janin, 1970).

Für die verschiedenen Werte von v_{max} sind in Abbildung 7 die entsprechenden Potentialfunktionen ψ^* zusammen mit dem Gravitationspotential ψ_0 der Anfangsverteilung dargestellt. ψ_0 ist nach Konstruktion unabhängig von v_{max} . Abbildung 8 zeigt die entsprechenden Massendichten der jeweiligen assoziierten Gleichgewichte. In Tabelle 1 sind für die verschiedenen Werte von v_{max} die Energie E_0 und die verallgemeinerte potentielle Energie W_0 der Anfangsverteilung, die Energie W_{ψ^*} des entsprechenden assoziierten Gleichgewichts, die jeweilige untere Schranke W_{min}^b der verallgemeinerten potentiellen Energie und als Maß für den relativen Abstand zwischen Anfangszustand und assoziiertem Gleichgewicht das Verhältnis $(W_{\psi^*} - E_0)/E_0$ zusammengestellt. Man erkennt, daß dieser Abstand selbst innerhalb einer einfachen Klasse von Anfangsverteilungen (7.21) bei Änderung eines Parameters (v_{max}) signifikante Unterschiede aufweist. Der numerische Fehler bei dieser Rechnung beträgt weniger als 0.1% der Gesamtenergie.

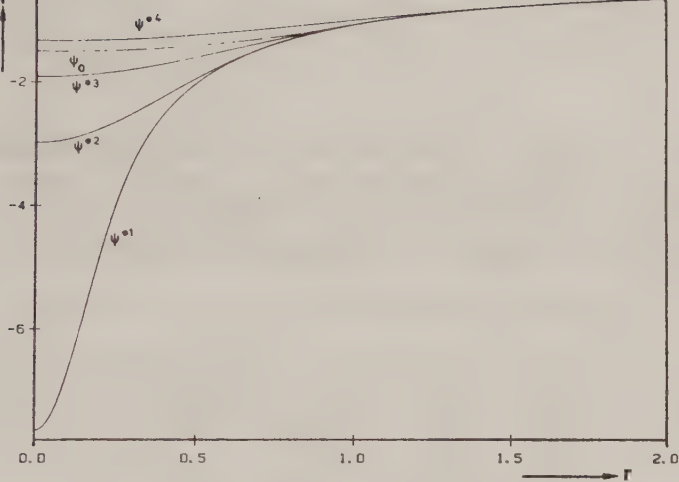


Abbildung 7. 1. Beispiel. Die unterbrochene Kurve zeigt das (von v_{max} unabhängige) Potential ψ_0 der Anfangsverteilung. ψ^{*1} , ψ^{*2} , ψ^{*3} und ψ^{*4} bezeichnen die Potentiale der den Parameterwerten $v_{max} = 0.5, 0.8, 1.0, 1.2$ entsprechenden assoziierten Gleichgewichten.

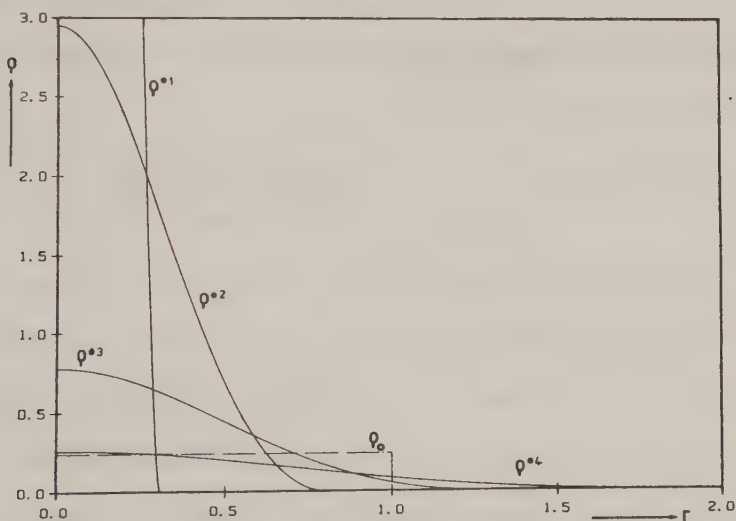


Abbildung 8. 1. Beispiel. Die unterbrochene Linie zeigt die (von v_{max} unabhängige) Massendichte der Anfangsverteilung. ϱ^{*1} , ϱ^{*2} , ϱ^{*3} und ϱ^{*4} bezeichnen die Massendichten der den Parameterwerten $v_{max} = 0.5, 0.8, 1.0, 1.2$ entsprechenden assoziierten Gleichgewichten.

Tabelle 1. 1. Beispiel. Typische Energien für die Beispiele mit Anfangszuständen vom Typ (7.21) mit verschiedenen Werten für v_{max} . E_0 ist die Gesamtenergie und W_0 die verallgemeinerte potentielle Energie des Anfangszustandes. W_{ψ^*} ist die Energie des assoziierten Gleichgewichts und W_{min}^b ist die untere Schranke von W_{ψ} (siehe Anhang).

v_{max}	E_0	W_0	W_{ψ^*}	W_{min}^b	$(W_{\psi^*} - E_0)/E_0$
0.5	-0.525	-0.622	-1.395	-40.84	1.66
0.8	-0.408	-0.449	-0.544	-15.96	0.33
1.0	-0.300	-0.338	-0.350	-10.21	0.16
1.2	-0.168	-0.233	-0.243	-7.09	0.45

7.3.2 Zweites Beispiel

Wir betrachten hier eine etwas kompliziertere Klasse von Anfangsverteilungen, die nicht monoton in r ist.

$$f_0(r, v) = \frac{1}{C} \begin{cases} [\cos(\frac{3}{4}\pi r) + \sin(\frac{3}{4}\pi r)] \cos(\frac{\pi}{2} \frac{v}{v_{max}}) & \text{für } r \leq 1 \wedge v \leq v_{max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.27)$$

C ist wiederum ein Normierungsfaktor. Für den Parameter v_{max} wählen wir die Werte 0.6; 0.8; 1.0 und 1.2. In Abbildung 9 sind die Höhenlinien der Anfangsverteilung dargestellt. Abbildung 10 zeigt die zugehörige Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$.

Für die obengenannten Werte von v_{max} haben wir mit dem in Kapitel 7.2 beschriebenen Iterationsverfahren das zu der entsprechenden Anfangsverteilung assoziierte Gleichgewicht berechnet. Für einen Fall ($v_{max} = 0.6$) zeigt Abbildung 11 die typische Konvergenzgeschwindigkeit. Als Startfunktion ψ_1 haben wir die Funktion $\psi_1 = -1/r$ gewählt, wobei ψ_1 in der Nähe von $r = 0$ numerisch abgeschnitten

wurde. In Abbildung 12 sind die Potentialfunktionen ψ^* der jeweiligen assoziierten Gleichgewichte zusammen mit dem (von v_{maz} unabhängigen) Potential ψ_0 der Anfangsverteilung dargestellt. Abbildung 13 zeigt die entsprechenden Massendichten ϱ^* und Abbildung 14 die Verteilungsfunktion $f_{\psi^*}^*(h)$ der jeweiligen assoziierten Gleichgewichte. Wie in unserem ersten Beispiel haben wir auch hier (in Tabelle 2) die interessierenden Energien zusammengestellt. Die numerischen Fehler liegen bei 0.01% der Gesamtenergien.

Auch dieses Beispiel zeigt, daß die Anfangszustände schon für nur kleine Änderungen eines Parameters deutlich unterschiedlich weit von ihren assoziierten Gleichgewichten entfernt sein können und somit ein sehr unterschiedlicher Anteil der Gesamtenergie durch kollektive Dissipation in Gleichgewichtsenergie umgesetzt werden muß, damit das System einen makroskopischen Gleichgewichtszustand erreichen kann.

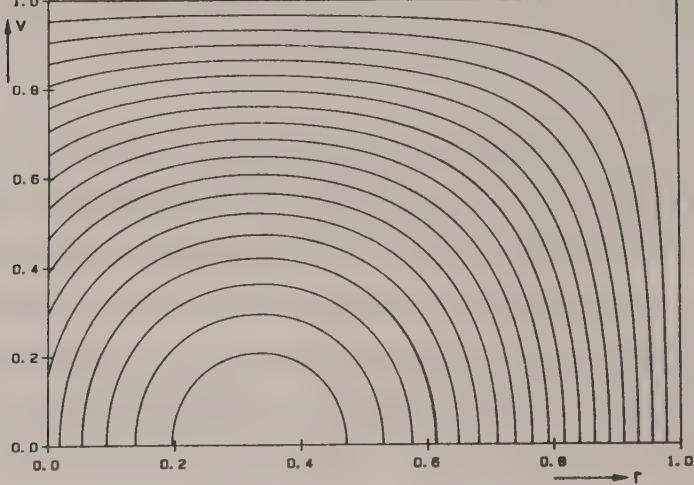


Abbildung 9. 2. Beispiel. Höhenlinien der Anfangsverteilung f_0 (7.27). Außerhalb des Kastens gilt $f_0 = 0$.

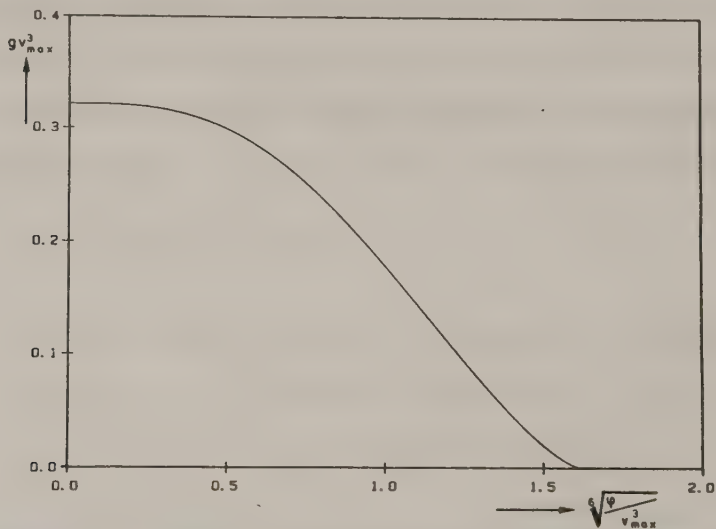


Abbildung 10. 2. Beispiel. Die Gedächtnisfunktion $g(\varphi)$. In der gewählten Skalierung ist $g(\varphi)$ unabhängig von $v_{\max}$.

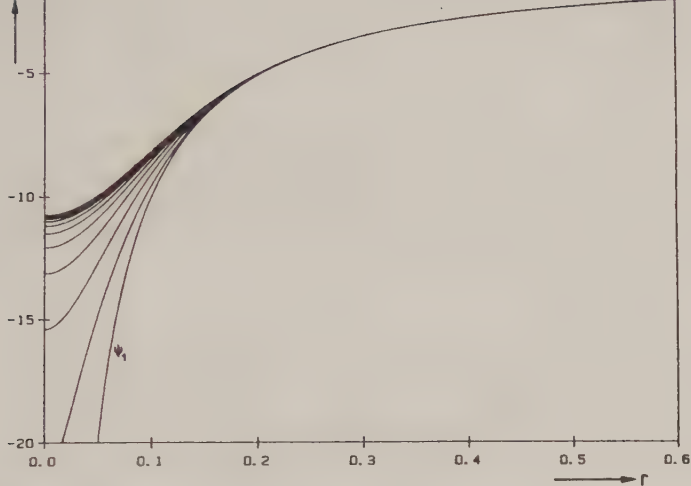


Abbildung 11. 2. Beispiel. Konvergenzgeschwindigkeit: dargestellt sind 15 Iterationsschritte für den Fall $v_{max} = 0.6$ mit einer numerisch abgeschnittenen Funktion $\psi_1 = -1/r$ als Startfunktion.

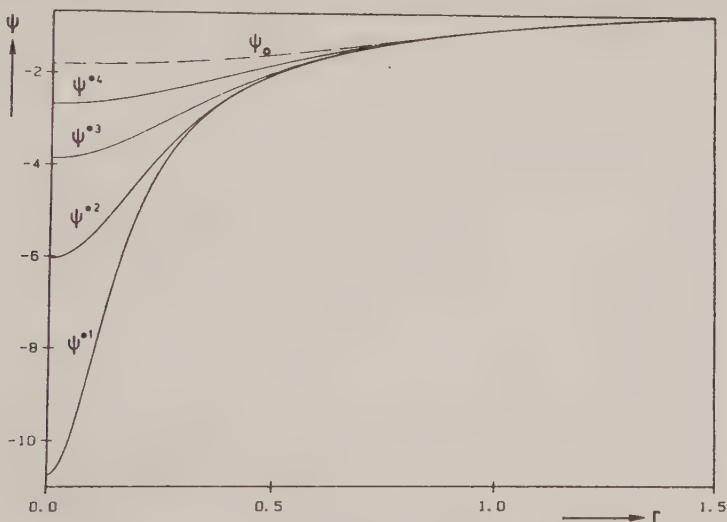


Abbildung 12. 2. Beispiel. Die unterbrochene Kurve zeigt das (von v_{max} unabhängige) Potential ψ_0 der Anfangsverteilung. ψ^{*1} , ψ^{*2} , ψ^{*3} und ψ^{*4} bezeichnen die Potentiale der den Parameterwerten $v_{max} = 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ entsprechenden assoziierten Gleichgewichte.

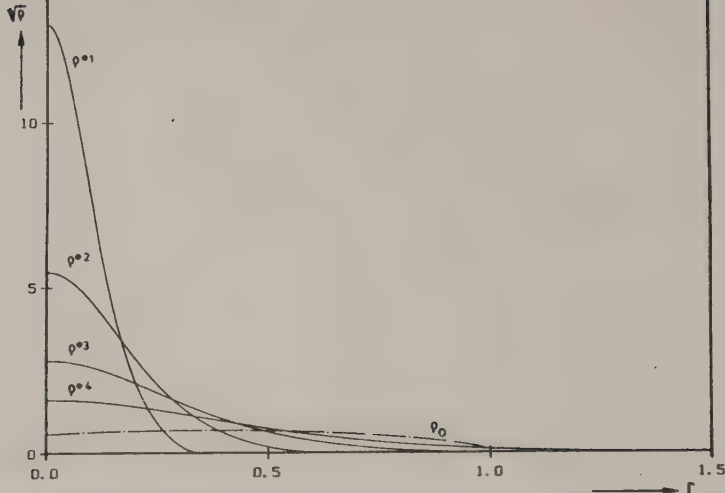


Abbildung 13. 2. Beispiel. Die unterbrochene Linie zeigt die (von v_{max} unabhängige) Massendichte der Anfangsverteilung. $\rho^{*1}, \rho^{*2}, \rho^{*3}$ und ρ^{*4} bezeichnen die Massendichten der den Parameterwerten $v_{max} = 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ entsprechenden assoziierten Gleichgewichte.

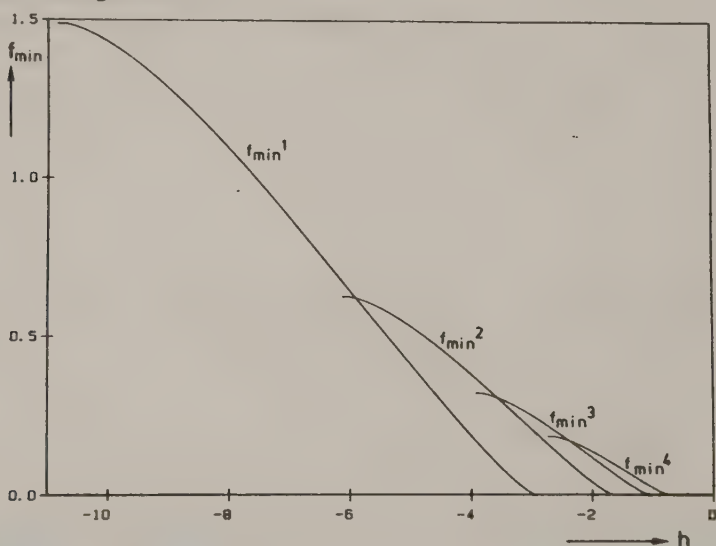


Abbildung 14. 2. Beispiel. $f_{min}^1, f_{min}^2, f_{min}^3, f_{min}^4$ bezeichnen die den 4 Fällen $v_{max} = 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ entsprechenden assoziierten Gleichgewichte $f_{\psi^*}^*(h)$.

Tabelle 2. 2. Beispiel. Typische Energien für die Beispiele mit Anfangszuständen vom Typ (7.27) mit verschiedenen Werten für v_{max} . E_0 ist die Gesamtenergie und W_0 die verallgemeinerte potentielle Energie des Anfangszustandes. W_{ψ^*} ist die Energie des assoziierten Gleichgewichts und W_{min}^b ist die untere Schranke von W_{ψ} (siehe Anhang).

v_{max}	E_0	W_0	W_{ψ^*}	W_{min}^b	$(W_{\psi^*} - E_0)/E_0$
0.6	-0.6323	-0.7680	-1.8676	-5085	1.95
0.8	-0.5741	-0.6542	-1.0505	-2860	0.83
1.0	-0.4993	-0.5435	-0.6725	-1831	0.35
1.2	-0.4079	-0.4374	-0.4669	-1271	0.14

8. Szenario einer Modellrelaxation

Wir haben gezeigt, daß zu jedem beliebigen Anfangszustand ein assoziiertes Gleichgewicht existiert. Dieses global stabile Gleichgewicht ist der Zustand kleinster Energie, der mit der Erhaltung der Phasenraumdichte verträglich ist. Damit haben wir das Fundament einer Theorie zur dynamischen Relaxation gelegt, deren Kernidee darin besteht, daß der Relaxationsprozeß von dem Anteil ΔE an der Gesamtenergie abhängen soll, der durch kollektive Dissipation von Nichtgleichgewichts- in Gleichgewichtsenergie umgesetzt werden muß. Der mit dem Übergang zu einer Beschreibung auf makroskopischen Skalen verbundene Informationsverlust und die entsprechende Entropiezunahme sollen von dieser Energie ΔE abhängen.

Wir wollen nun zum Abschluß dieser Arbeit in einem kurzen Ausblick skizzieren, wie man sich eine solche Modellrelaxation vorstellen kann.

Denken wir uns zu einer Zeit $t = t_0$ einen beliebigen Anfangszustand f_0 (siehe Abbildung 15a) mit der Energie E_0 . Wir bestimmen zunächst das zugehörige assoziierte Gleichgewicht. Dieses habe die Energie W^* . Ist der Anfangszustand mit dem assoziierten Gleichgewicht identisch ($W^* = E_0$), so wissen wir, daß das System in diesem Zustand bleiben wird. Im allgemeinen jedoch werden die Zustände verschieden sein ($W^* < E_0$). Das assoziierte Gleichgewicht ist dann zwar phasenraumdichteerhaltend zugänglich, nicht aber energieerhaltend. Die Energiedifferenz $\Delta E = E_0 - W^*$ hindert als Nichtgleichgewichtsenergie das System daran, in dieses

Gleichgewicht hineinzurelaxieren, und muß durch kollektive Dissipation in Gleichgewichtsenergie umgesetzt werden.

Wir betrachten nun die zeitliche Entwicklung des Systems und verstehen diese als eine Art Schwingen im Zustandsraum um das assoziierte Gleichgewicht. Die Energie, die in diesem Schwingen steckt, ist ΔE . Die Variationen der Verteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ erfolgen nun im Laufe der Zeit auf immer kleineren Skalen (siehe Einleitung), so daß, wenn man $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ mit endlicher Auflösung betrachtet, die zeitlichen Variationen auf makroskopischen Skalen immer geringer werden. Das bedeutet, daß dieses Schwingen im Laufe der Zeit auf immer mikroskopischeren Skalen erfolgt, und somit ein immer größer werdender Teil der Energie ΔE durch kollektive Dissipation in Gleichgewichtsenergie auf makroskopischen Skalen umgesetzt wird. Die Entropie auf großen Skalen nimmt dabei zu, die Energie, die instantan im Schwingen auf makroskopischen Skalen steckt, nimmt ab. Der energetische Abstand des Zustandes auf makroskopischen Skalen zum instantanen Zustand minimaler Energie nimmt ab, da die Energie des instantanen Zustands minimaler Energie zunimmt. Dieser Zustand ist als global stabiles Gleichgewicht immer von der Form $f_{\psi^*}^*(h)$, jedoch zu einer veränderten Gedächtnisfunktion $g_t(\varphi)$. Abbildung 15b zeigt eine typische Situation zu einer Zeit $t_1 > t_0$.

Dieser Relaxationsprozeß schreitet im Verlauf der zeitlichen Entwicklung des Systems nun immer weiter voran, bis die Energie ΔE zeitasymptotisch vollständig durch kollektive Dissipation in Gleichgewichtsenergie (eines Gleichgewichts auf makroskopischen Skalen) umgesetzt worden ist. Der zeitasymptotische Zustand minimaler

Energie ist dann ein stoßfrei global stabiles Gleichgewicht auf makroskopischen Skalen mit der Energie E_0 und einer höheren Entropie als der Anfangszustand (siehe Abbildung 15c).

Für Anfangszustände, die sich nicht auf mikroskopischen Skalen, jedoch auf makroskopischen Skalen schon in einem relaxierten, global stabilen Gleichgewicht befinden, entspricht die in diesem Szenario beschriebene Umsetzung der Nichtgleichgewichtsenergie ΔE des mikroskopischen Zustandes in Gleichgewichtsenergie auf makroskopischen Skalen nicht einem zeitlich ablaufenden Relaxationsprozeß, sondern einem Wechsel der Skala bei der Beschreibung des Systems.

Die Realisierung des oben beschriebenen Szenarios und die explizite Konstruktion einer solchen Modellrelaxation ist die Aufgabe zukünftiger Arbeiten.

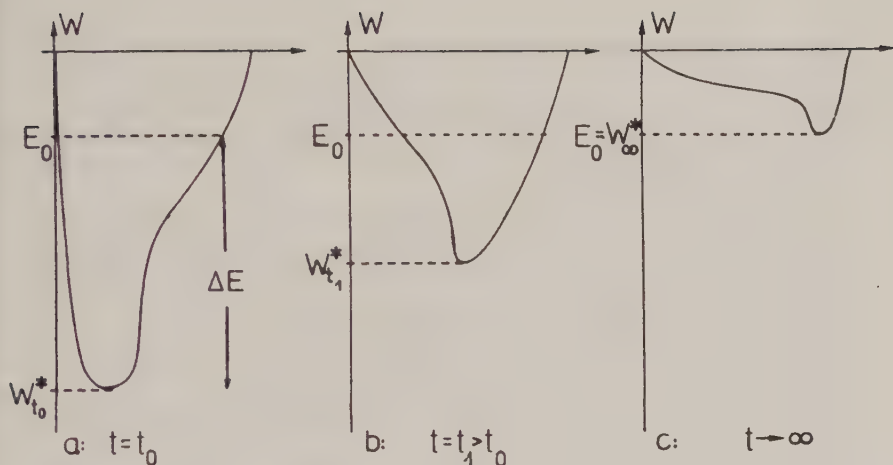


Abbildung 15. Szenario einer Modellrelaxation. Bild (a) zeigt die verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ zur Anfangszeit $t = t_0$, Bild (b) zeigt W_ψ zu einer beliebigen späteren Zeit $t_1 > t_0$ und Bild (c) zeigt W_ψ , einer geänderten Gedächtnisfunktion $g_t(\varphi)$ entsprechend, am Ende der Relaxation.

9. Zusammenfassung und Diskussion

In der vorliegenden Arbeit haben wir eine neue Theorie zur Relaxation stoßfrei selbst-gravitierender Materie vorgestellt.

Zunächst haben wir die existierenden Modelle und Ansätze kritisch diskutiert und sind dabei insbesondere auf die grundlegenden Arbeiten von Lynden-Bell (1967) und Tremaine et al. (1986) eingegangen. Diese Theorien basieren auf der Idee, die Endgleichgewichte dynamischer Relaxation als Maxima entropieähnlicher konkaver Funktionale durch Variation unter den Nebenbedingungen von Masse- und Energieerhaltung zu berechnen. Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, daß diese Konzepte nicht geeignet sind, Endzustände dynamischer Relaxation zu bestimmen, da Variationsprobleme der oben beschriebenen Art nur für sehr spezielle Anfangsbedingungen Lösungen liefern.

In unserer Theorie zur dynamischen Relaxation sind wir daher von den bestehenden Konzepten abgewichen. Wir sind von der Idee ausgegangen, daß der Relaxationsprozeß von der Menge an Energie abhängen muß, die in einem System zum Erreichen eines makroskopischen Gleichgewichtes durch Phasenmischung von Nichtgleichgewichtsenergie in Gleichgewichtsenergie umgesetzt werden muß. Diese Menge an Energie entspricht der Differenz ΔE zwischen der Energie eines gegebenen Anfangszustandes und der Energie des global stabilen Gleichgewichtes, das für den Anfangszustand phasenraumdichteerhaltend (nicht energierhaltend) zugänglich ist. Dieses global stabile Gleichgewicht haben wir dem Anfangszustand als assoziiertes

Gleichgewicht zugeordnet und die Energiedifferenz als Maß dafür benutzt, wie weit ein Anfangszustand von einem (global stabilen) Gleichgewicht entfernt ist. Als Motivation für einen solchen Ansatz haben wir ausgeführt, daß für den Fall, daß ein Anfangszustand schon ein global stabiles Gleichgewicht ist, das System nicht aus diesem global stabilen Gleichgewicht "herausrelaxieren" wird. Somit wird der Relaxationsprozeß und die damit verbundene Entropiezunahme davon abhängen müssen, wie weit ein Anfangszustand von seinem assoziierten Gleichgewicht entfernt ist.

Ziel dieser Arbeit war es, die grundlegenden Fragen zu klären, die die Durchführbarkeit eines solchen Konzepts für die Behandlung dynamischer Relaxation betreffen. Es war vor allem zu untersuchen, ob und wie wir für einen gegebenen Anfangszustand die Menge an Nichtgleichgewichtsenergie ΔE bestimmen können, die diesen Anfangszustand (im Rahmen der stoßfreien Theorie) von einem global stabilen Gleichgewicht trennt. Das heißt, wir mußten zum einen zeigen, daß zu jedem Anfangszustand ein assoziiertes Gleichgewicht existiert, und zum anderen, wie man dieses assoziierte Gleichgewicht bestimmen kann.

Hierfür haben wir zunächst für die hier betrachteten Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden eine verallgemeinerte kinetische und eine verallgemeinerte potentielle Energie konstruiert. Diese verallgemeinerte kinetische und potentielle Energie sind das Analogon zur kinetischen und potentiellen Energie einfacher mechanischer Systeme mit nur wenigen Freiheitsgraden. Die verallgemeinerte potentielle Energie

haben wir durch Minimieren der Energie bezüglich f bei festem ψ unter Berücksichtigung der Erhaltung der Phasenraumdichte erhalten. Sie ist somit ein Funktional des Gravitationspotentials ψ .

Wir haben bewiesen, daß die verallgemeinerte potentielle Energie für jeden beliebigen (nichtsingulären) Anfangszustand gleichmäßig nach unten beschränkt ist. Die gleichmäßige Beschränktheit der verallgemeinerten potentiellen Energie ist die entscheidende Bedingung für die Existenz des assoziierten Gleichgewichts.

Um das zu einem Anfangszustand assoziierte Gleichgewicht zu bestimmen, haben wir die verallgemeinerte potentielle Energie bezüglich ψ minimiert, wobei die Phasenraumdichteerhaltung zu berücksichtigen war. Als Euler-Lagrange Gleichung für die stationären Punkte der verallgemeinerten potentiellen Energie erhielten wir eine Poisson-Gleichung in der Form einer nichtlinearen Integrodifferentialgleichung. Das assoziierte Gleichgewicht wird durch diejenige Lösung dieser Poisson-Gleichung beschrieben, die dem absoluten Minimum der verallgemeinerten potentiellen Energie entspricht.

Wir haben spezielle Eigenschaften der verallgemeinerten potentiellen Energie und des assoziierten Gleichgewichts diskutiert. Insbesondere konnten wir zeigen, daß ein assoziiertes Gleichgewicht sowohl im Sinne eines Energieprinzips als auch im Sinne von Lyapunov global stabil ist.

Für zwei Klassen von Anfangszuständen haben wir die jeweils assoziierten Gleichgewichte quantitativ bestimmt und gezeigt, daß Anfangszustände schon bei

nur kleinen Änderungen eines Parameters deutlich unterschiedlich weit von ihren assoziierten Gleichgewichten entfernt sein können, so daß sehr unterschiedliche Anteile der Gesamtenergie bei der Relaxation durch kollektive Dissipation in Gleichgewichtsenergie umgesetzt werden müssen.

Hiermit haben wir die grundlegenden Fragen die Durchführbarkeit unserer Theorie betreffend geklärt und somit das Fundament gelegt, auf dem aufbauend Modelle für den Relaxationsprozeß entwickelt werden können. Prinzipiell hat man sich diesen Relaxationsprozeß im Rahmen unserer Theorie als ein mit Informationsverlust verbundenes Anheben der verallgemeinerten potentiellen Energie vorzustellen, so daß das absolute Minimum der angehobenen verallgemeinerten potentiellen Energie den Wert der Gesamtenergie E_0 des Anfangszustandes besitzt. Ein entsprechendes Szenario haben wir in Abbildung 15 dargestellt.

Ohne daß der Relaxationsprozeß selber und die quantitative Berechnung von Endgleichgewichten für gegebene Anfangszustände Gegenstand dieser Arbeit war, haben wir hier erstmalig eine fundierte theoretische Grundlage gelegt für die Existenz global stabiler Endgleichgewichte stoßfrei selbstgravitierender Systeme. Im Rahmen unserer Theorie ist ein Endzustand als Zustand minimaler Energie eines geeignet angehobenen Funktionals der verallgemeinerten potentiellen Energie assoziiertes Gleichgewicht für eine Klasse von Anfangszuständen, die dieselbe Entropie haben wie dieser Endzustand. Aus der vorliegenden Arbeit wissen wir, daß dieser Endzustand somit ein global stabiles Gleichgewicht ist. Der Aspekt der globalen Stabilität der Endzustände wurde in der Literatur bisher nicht diskutiert.

Darüberhinaus haben wir allgemein bewiesen, daß stoßfrei selbstgravitierende Systeme weder in Teilen noch als ganzes in eine Singularität kollabieren können. Während Lynden-Bell (1967) betont, daß es ein grundlegender Schwachpunkt seiner Theorie sowie des Konzepts der dynamischen Relaxation im Rahmen der Stelldynamik überhaupt sei, daß man die Existenz von Gleichgewichten für stoßfrei relaxierende Systeme "stillschweigend" voraussetzen und den Kollaps in eine Singularität ad hoc ausschließen müsse, können wir erstmalig diese Annahme durch einen strengen Beweis ersetzen.

Die wichtigste Aufgabe für zukünftige Arbeiten ist sicherlich die Konstruktion von Modellrelaxationen in dem oben und in Kapitel 8 beschriebenen Sinn. Es ist a priori nicht zu erwarten, daß dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt; vielmehr werden sich viele, prinzipiell mögliche Modelle für den Relaxationsprozeß angeben lassen. Daher ist die zweite wichtige Frage, die zu beantworten bleibt, die nach geeigneten Auswahlkriterien. Diese haben zu berücksichtigen, daß die Grundlage einer Modellrelaxation der Übergang von der mikroskopischen Dynamik des Systems zu einer Beschreibung auf makroskopischen Skalen ist.

In dieser Arbeit haben wir uns bei der expliziten Konstruktion der assoziierten Gleichgewichte auf den Fall verschwindenden Gesamtdrehimpulses beschränkt. Die Erweiterung auf den Fall endlichen Gesamtdrehimpulses ist ebenfalls in zukünftigen Arbeiten durchzuführen.

Die Grundlage unserer Theorie ist die klassische Mechanik. In der Literatur wird die Existenz schwarzer Löcher in den Zentralgebieten elliptischer Galaxien diskutiert (z.B. Wolfe und Burbidge, 1970; Gerhardt, 1987; Richestone, 1987). Es ist nicht auszuschließen, daß die in numerischen Untersuchungen beobachteten hohen Zentral-dichten während der sehr heftigen Anfangsphase der Relaxation (z.B. Hoffman et al., 1979; van Albada, 1982) zu relativistischen Effekten in den Kerngebieten elliptischer Galaxien führt. Daher ist ein weiterer interessanter Gesichtspunkt die Frage, ob und wie sich relativistische Effekte in unsere Theorie einbauen lassen.

Unter den oben genannten offenen Fragen hat die Konstruktion geeigneter Modellrelaxationen sicherlich Priorität. Mit Hilfe solcher Modellrelaxationen erwarten wir von der hier vorgestellten Theorie, zu einem besseren Verständnis des Prozesses der dynamischen Relaxation beitragen, sowie die Grundlage fundierter Modelle für die Entwicklung astrophysikalischer Objekte wie elliptischer Galaxien bilden zu können.

Anhang

In Kapitel 5 haben wir bewiesen, daß die verallgemeinerte potentielle Energie W_ψ gleichmäßig nach unten beschränkt ist, indem wir W_ψ durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} W_\psi^b = & \hat{g}\hat{\varphi}\hat{h} + \frac{\beta}{32\pi G} \left(\frac{3}{\pi\sqrt{2}}\right)^{1/3} \hat{\varphi}^{1/3}(-\hat{h})^{3/2} \\ & - \frac{4\sqrt{2}}{15} \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1/3} \hat{g}\hat{\varphi}^{2/3} \left[\int \Theta(\hat{h}-\psi)(\hat{h}-\psi)^{9/2} d^3r \right]^{1/3} \\ & + \frac{\beta}{16\pi G} \left[\int \Theta(\hat{h}-\psi)(\hat{h}-\psi)^6 d^3r \right]^{1/3} \end{aligned}$$

(siehe Gleichung (5.28)) nach unten abgeschätzt haben. Wir wollen hier eine explizite untere Schranke für W_ψ berechnen, indem wir W_ψ^b unter der Bedingung der Phasenvolumenerhaltung (5.5) bezüglich ψ variieren und das Minimum von W_ψ^b bestimmen. Dabei berücksichtigen wir, daß $\hat{h}_\psi$ funktional von ψ abhängt. W_ψ^b hängt nur in dem Bereich des Ortsraums von den Werten von ψ ab, wo gilt $\hat{h}_\psi - \psi \geq 0$. Zur Vereinfachung benutzen wir folgende Abkürzungen und vernachlässigen den Index ψ

$$A = \hat{g}\hat{\varphi} - \frac{3\beta}{64\pi G} \left(\frac{3}{\pi\sqrt{2}}\right)^{1/3} \hat{\varphi}^{1/3}(-\hat{h})^{1/2} \quad (A1)$$

$$a = \hat{g}\hat{\varphi}^{2/3} \frac{4\sqrt{2}}{15} \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1/3} \quad (A2)$$

$$b = \frac{\beta}{16\pi G} \quad (A3)$$

Mit dem Ansatz einer linearen Störung $\psi + \delta\psi$, $\hat{h} + \delta\hat{h}$ erhalten wir aus Gleichung (5.5)

$$\delta\hat{h} = \frac{\int \Theta(\hat{h}-\psi) \sqrt{\hat{h}-\psi} \delta\psi d^3r}{\int \Theta(\hat{h}-\psi) \sqrt{\hat{h}-\psi} d^3r} \quad (A4)$$

Mit Hilfe von (A4) berechnen wir die Variation erster Ordnung von W^b .

$$\begin{aligned}
\delta W^b = & A \int \Theta(\hat{h} - \psi) \frac{\sqrt{\hat{h} - \psi}}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) \sqrt{\hat{h} - \psi} d^3 r \right)} \delta \psi d^3 r \\
& - \frac{3}{2} a \int \Theta(\hat{h} - \psi) \frac{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{7/2} d^3 r \right) \sqrt{\hat{h} - \psi}}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3 r \right)^{2/3} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) \sqrt{\hat{h} - \psi} d^3 r \right)} \delta \psi d^3 r \\
& + \frac{3}{2} a \int \Theta(\hat{h} - \psi) \frac{(\hat{h} - \psi)^{7/2}}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3 r \right)^{2/3}} \delta \psi d^3 r \\
& + 2b \int \Theta(\hat{h} - \psi) \frac{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^5 d^3 r \right) \sqrt{\hat{h} - \psi}}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^6 d^3 r \right)^{2/3} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) \sqrt{\hat{h} - \psi} d^3 r \right)} \delta \psi d^3 r \\
& - 2b \int \Theta(\hat{h} - \psi) \frac{(\hat{h} - \psi)^5}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^6 d^3 r \right)^{2/3}} \delta \psi d^3 r
\end{aligned} \tag{A5}$$

Für den Bereich des Ortsraums, für den gilt $\hat{h} - \psi \geq 0$, liefert die Stationaritätsbedingung $\delta W^b = 0$

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{A \sqrt{\hat{h} - \psi}}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) \sqrt{\hat{h} - \psi} d^3 r \right)} \\
& - \frac{3}{2} a \frac{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{7/2} d^3 r \right) \sqrt{\hat{h} - \psi}}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3 r \right)^{2/3} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) \sqrt{\hat{h} - \psi} d^3 r \right)} \\
& + \frac{3}{2} a \frac{(\hat{h} - \psi)^{7/2}}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3 r \right)^{2/3}} - 2b \frac{(\hat{h} - \psi)^5}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^6 d^3 r \right)^{2/3}} \\
& + 2b \frac{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^5 d^3 r \right) \sqrt{\hat{h} - \psi}}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) (\hat{h} - \psi)^6 d^3 r \right)^{2/3} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) \sqrt{\hat{h} - \psi} d^3 r \right)}
\end{aligned} \tag{A6}$$

Hierbei hängt das entsprechende Volumen V , in dem die Beziehung $\hat{h} - \psi \geq 0$ erfüllt ist, von ψ ab. Für den Bereich des Ortsraums, in dem gilt $\hat{h} - \psi < 0$, wird die Stationaritätsbedingung trivial erfüllt.

Auf Grund der Bedingung der Phasenvolumenerhaltung und der Forderung, daß ψ für hinreichend große $|\vec{r}|$ gegen Null gehen soll, ist der Fall $\sqrt{\hat{h} - \psi} = 0$ äquivalent zu $\hat{h} = \psi = 0$ im gesamten Ortsraum. Da das bedeuten würde $W_{\hat{h}=\psi=0}^b = 0$, können wir diesen Fall vernachlässigen und erhalten aus Gleichung (A6)

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2}a \frac{(\hat{h} - \psi)^3}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi)(\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3r \right)^{2/3}} - 2b \frac{(\hat{h} - \psi)^{9/2}}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi)(\hat{h} - \psi)^6 d^3r \right)^{2/3}} = \\
& + \frac{3}{2}a \frac{\int \Theta(\hat{h} - \psi)(\hat{h} - \psi)^{7/2} d^3r}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi)(\hat{h} - \psi)^{9/2} d^3r \right)^{2/3} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) \sqrt{\hat{h} - \psi} d^3r \right)} \\
& - 2b \frac{\int \Theta(\hat{h} - \psi)(\hat{h} - \psi)^5 d^3r}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi)(\hat{h} - \psi)^6 d^3r \right)^{2/3} \left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) \sqrt{\hat{h} - \psi} d^3r \right)} \\
& - \frac{A}{\left(\int \Theta(\hat{h} - \psi) \sqrt{\hat{h} - \psi} d^3r \right)}
\end{aligned} \tag{A7}$$

Die rechte Seite von Gleichung (A7) hängt nicht von $\vec{r}$ ab, daher muß das minimierende ψ innerhalb des Gebiets, in dem gilt $\hat{h} - \psi \geq 0$, konstant sein ($\psi = c$). Für Funktionen ψ dieser Form liefert dann Gleichung (A7)

$$A = 0 \tag{A8}$$

Aus Gleichung (A8) zusammen mit Gleichung (A1) erhalten wir den Wert $\hat{h}_m$ von $\hat{h}$, der dem minimierenden ψ entspricht.

$$\hat{h}_m = -\hat{g}^2 \hat{\varphi}^{4/3} \frac{G^2}{\beta^2} \left(\frac{64\pi}{3} \right)^2 \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{3} \right)^{2/3} \tag{A9}$$

Nun setzen wir $\hat{h}_m$ aus (A9) und $\psi = c$ in W^b ein. Unter Berücksichtigung der Phasenvolumenerhaltung (5.5) erhalten wir

$$W^b = -\frac{1}{3}\hat{g}^3\hat{\varphi}^{7/3}\frac{G^2}{\beta^2}\left(\frac{64\pi}{3}\right)^2\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\right)^{2/3} - \left(\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\right)^{1/3}a\hat{\varphi}^{1/3}(\hat{h}_m - c) \\ + \left(\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\right)^{1/3}b\hat{\varphi}^{1/3}(\hat{h}_m - c)^{3/2} \quad (\text{A10})$$

W^b ist noch eine Funktion von c , die wir bezüglich c minimieren können. Für das minimierende c erhalten wir

$$c_m = \hat{h}_m + \left(\frac{2a}{3b}\right)^2 \\ = -\hat{g}^2\hat{\varphi}^{4/3}\frac{G^2}{\beta^2}\pi^{8/3}64^2\left(\frac{1}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{1/3} - \frac{8}{675}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}\right) \quad (\text{A11})$$

Mit Hilfe von Gleichung (A10) und (A11) können wir nun als untere Schranke von W das Minimum von W^b berechnen.

$$W_\psi \geq W_\psi^b \geq W_{\min}^b = K\hat{g}^3G^2\hat{\varphi}^{7/3} \quad (\text{A12})$$

mit

$$K \approx -69$$

Das obige Verfahren liefert eine eindeutige Lösung, so daß wir tatsächlich das Minimum von W^b bestimmt haben.

Abschließend sei bemerkt, daß für den Spezialfall sphärischer Symmetrie und konstanter Phasenraumdicke die untere Schranke in folgender einfacherer Form geschrieben werden kann.

$$W_{\min}^b = -\frac{GM^2}{R_0}\frac{1}{v_{0n}^2}K' \quad (\text{A14})$$

mit

$$K' \approx 10.3,$$

R_0 : Anfangsradius des Systems,

M : Gesamtmasse,

$$v_{0n} = v_0 \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \text{ und}$$

v_0 : Anfangsradius im Geschwindigkeitsraum.

Literatur

- Allen, A.J., & Yabushita, S., 1984. *Astrophys. J.*, **278**, 468.
- Aly, J.J., 1989. eingereicht bei *Mon. Not. R. astr. Soc.*
- Amann, H., 1976. *J. Diff. Eq.*, **21**, 363.
- Antonov, V.A., 1961. *Soviet Astr.-AJ*, **4**, 859.
- Antonov, V.A., 1962. *Vest. Leningrad Univ.*, **7**, 135.
- Balescu, R., 1975. *"Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics"*, Wiley.
- Bartholomew, P., 1971. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **151**, 333.
- Bertin, G., & Stiavelli, M., 1984. *Astron. Astrophys.*, **137**, 26.
- Binney, J., 1976. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **177**, 19.
- Binney, J., 1987. In: *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, p.269 (Diskussionsbeitrag), ed. De Zeeuw, T., Reidel.
- Bouvier, P., & Janin, G., 1970. *Astron. Astrophys.*, **5**, 127.
- Dejonghe, H., 1987. *Astrophys. J.*, **320**, 477.
- Doremus, J.P., Feix, M.R., & Baumann, G., 1969. *Astrophys. Lett.*, **3**, 137.
- Forster, O., 1977. *Analysis 2*, rororo vieweg.
- Freeman, K.C., 1975. In: *Galaxies and the Universe*, p.409, ed. Sandage, A., Sandage, M., & Kristian, J., University of Chicago Press.
- Gerhardt, O.E., 1987. In: *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, p.241, ed. De Zeeuw, T., Reidel.

- Gillon, D., Doremus, J.P. & Baumann, G., 1976. *Astron. Astrophys.*, **48**, 467.
- Gott, J.R. III, 1973. *Astrophys. J.*, **186**, 481.
- Gott, J.R. III, 1975. *Astrophys. J.*, **201**, 296.
- Gott, J.R. III, 1977. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* , **15**, 235.
- Gurzadyan, V.G., & Savvidy, G.K., 1986. *Astron. Astrophys.*, **160**, 203.
- Haken, H., 1983. *Synergetik*, Springer.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. & Pólya, G., 1952. *Inequalities*, 2nd edn, Cambridge University Press.
- Hénon, M., 1964. *Annales D ' Astrophysique* , **27**, 83.
- Hoffman, Y., Shlosman, I., & Shaviv, G., 1979. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **189**, 737.
- Kandrup, H.E., 1987. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **225**, 995
- Kießling, M.K.-H., 1989. *J. Stat. Phys.*, **55**, 203.
- Kulsrud, R.M. & Mark, J.W.K., 1970. *Astrophys. J.*, **160**, 471.
- Lachière-Rey, M., 1984. *Adv. Space Res.*, **3**, 387.
- Larson, R.B., 1969. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **145**, 405.
- Larson, R.B., 1974a. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **166**, 585.
- Larson, R.B., 1974b. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **169**, 229.
- Larson, R.B., 1975. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **173**, 671.
- Layzer, L., 1977. *Gen. Rel. Grav.*, **8**, 3.
- Lieb, E.H., 1977. *Stud. Appl. Math.*, **57**, 93.

- Luwel, M., & Severne, G., 1983. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **203**, 15P.
- Lynden-Bell, D., 1967. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **136**, 101.
- Lynden-Bell, D., & Sanitt, N., 1969. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **143**, 167.
- Lynden-Bell, D., & Wood, R., 1968. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **138**, 495.
- Madsen, J., 1987. *Astrophys. J.*, **316**, 497.
- May, A., & van Albada, T.S., 1984. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **209**, 15.
- Misra, B., Prigogine, I., & Courbadge, M., 1979. *Physica*, **98A**, 1.
- Nicolis, G., & Prigogine, J., 1977. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*, Wiley.
- Prigogine, I., & Severne, G., 1966. *Physica*, **32**, 1376.
- Rephaeli, Y., 1983. *Astron. Astrophys.*, **123**, 98.
- Richestone, D.O., 1987. In: *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, p.261, ed. De Zeeuw, T., Reidel.
- Richestone, D.O. & Tremaine, S. 1988. *Astrophys. J.*, **327**, 82.
- Rosen, G., 1971. *SIAM J. Appl. Math.*, **21**, 30.
- Saslaw, W.C., 1968. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **141**, 1.
- Saslaw, W.C., 1969. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **143**, 437.
- Saslaw, W.C., 1985. *"Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems"*, Cambridge University Press.
- Schindler, K., & Goldstein, H., 1983. *Phys. Fluids*, **26**, 2222.

- Seboldt, W., 1981. *Astrophys. J.*, **243**, 1013.
- Severne, G., & Luwel, M., 1980. *Astrophys. Space Sci.*, **72**, 293.
- Shlosman, I., Hoffman, Y., & Shaviv, G., 1979. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **189**, 723.
- Shu, F.H., 1978. *Astrophys. J.*, **225**, 83.
- Stiavelli, M. & Bertin, G., 1987. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **229**, 61.
- Sygnnet, J.F., Des Forets, G., Lachière-Rey, M., & Pellat, R., 1984. *Astrophys. J.*, **276**, 737.
- Tanekusa, J., 1987. *Publ. Astron. Soc. Japan*, **39**, 425.
- Tremaine, S., Hénon, M. & Lynden-Bell, D., 1986. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **219**, 285.
- van Albada, T.S., 1982. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **201**, 939.
- White, S.D.M., 1987. In: *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, p.339, ed. De Zeeuw, T., Reidel.
- White, S.D.M. & Narayan, R., 1987. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **229**, 103.
- Wolfe, A.M. & Burbidge, G.R., 1970. *Astrophys. J.*, **161**, 419.

Lebenslauf

Name	Wiechen
Vorname	Heinz
Geburtsdatum	5. 6. 1958
Geburtsort	Bochum
Eltern	Heinz Wiechen Elisabeth Wiechen, geb. Kaschuba
Grundschule	Ostern 1965 - Sommer 1968 Kath. Grundschule Drusenbergstraße, Bochum
Gymnasium	Herbst 1968 - Sommer 1977 Gymnasium am Ostring, Bochum
Abitur	Mai 1977
Studium	ab Wintersemester 1977/78 Ruhr-Universität Bochum
Studienfächer	Physik/ Astronomie Mathematik
Vordiplom	Mathematik: August 1979 Physik: Oktober 1979
Diplom	Juli 1985, in Physik
Diplomarbeit	"Theorie des Schweifs der Erdmagnetosphäre: Einbeziehung des erdfernen Bereichs"
Wissenschaftlicher Mitar- beiter	seit Juli 1985 am Institut für Theoretische Physik IV Ruhr-Universität Bochum

